

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С. П. ТИМОШЕНКА**

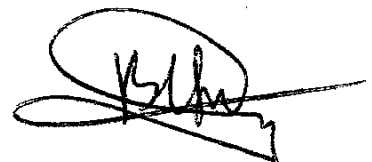
Цибульник Віталій Олександрович

УДК 539.3

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ СТАТИКИ КОНІЧНИХ
ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ОСНОВІ АПРОКСИМАЦІЇ
ФУНКЦІЙ ДИСКРЕТНИМИ РЯДАМИ ФУР'Є**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук



Київ – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

Науковий керівник: академік НАН України
доктор технічних наук, професор
Григоренко Ярослав Михайлович,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
головний науковий співробітник відділу обчислювальних
методів

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий
співробітник
Козлов Володимир Ілліч,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник відділу термопружності

доктор технічних наук, професор
Піскунов Вадим Георгійович,
Національний транспортний університет
Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри
опору матеріалів і машинознавства

Захист відбудеться «18» чудня 2007 р. о 10 годині на засіданні спеціалізованої
вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за
адресою 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім.
С. П. Тимошенка НАН України за адресою 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «13» 11 2007 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук



О. П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Конічні оболонки сталої та змінної товщини широко застосовуються в різних галузях техніки як елементи конструкцій та деталі машин. При розрахунку міцності оболонкових конструкцій необхідно мати інформацію про їх напружено-деформований стан. Важливим при визначенні напружено-деформованого стану є врахування змінності товщини оболонки, оскільки, часто необхідно змінити параметри деформативності конструкції не змінюючи її ваги.

Для розв'язання задач статички циліндричних та конічних оболонок змінної в одному координатному напрямку товщини існує ряд розроблених методів, тоді як задачам про напружено-деформований стан оболонок змінної в двох напрямках товщини присвячено небагато робіт.

Це можна пояснити значними складнощами, що виникають при розробці методів розв'язання задач статички конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини при довільних граничних умовах та навантаженні та доведення їх до числових значень, що дозволили б провести аналіз напружено деформованого стану оболонок даного класу в залежності від фізичних та геометричних параметрів. При цьому особливі складнощі виникають для оболонок змінної за напрямною товщини. У цьому випадку не вдається розділити змінні за допомогою рядів Фур'є і звести задачу до одновимірної, тобто для отримання розв'язків таких задач необхідно застосовувати нетрадиційні підходи.

Тому розробка ефективного підходу до розв'язання задач про напружено-деформований стан оболонок змінної товщини при різних граничних умовах під дією нерівномірно розподіленого та локального навантаження на основі нетрадиційного методу із застосуванням дискретних рядів Фур'є є актуальною проблемою і має значний теоретичний інтерес і практичне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконані у відповідності з науковими темами: 1) № ДР 0101U002861 2001-2005 "Розробка чисельно-аналітичних підходів до розв'язання статичних та динамічних задач для просторових тіл і оболонок різної форми та структури з врахуванням анізотропії і неоднорідності", шифр 1.3.1.326, результати дисертаційної роботи увійшли до звіту теми; 2) № ДР 0105U001991 2005-2009 "Розробка методів розв'язання задач та дослідження статичного і динамічного деформування пружних тіл складної геометрії та структури на основі моделей різного рівня", шифр 1.3.1.349.

Мета і задачі дослідження. Мету і задачі цього дослідження можна сформулювати так:

- розробка ефективного підходу із застосуванням дискретних рядів Фур'є до чисельного розв'язання двовимірних задач статички конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією нерівномірного навантаження;

- побудова алгоритму і реалізація на ПК програмного комплексу для чисельного розв’язання задач вказаного класу, що дасть змогу проводити дослідження напружено-деформованого стану тонких оболонок з урахуванням зміни геометричних та механічних параметрів;
- розв’язання різних класів задач на основі підходу, що пропонується, а також проведення аналізу напружено-деформованого стану конічних оболонок змінної товщини в залежності від конічності, параметрів зміни товщини і навантаження при різних варіантах закріплення країв.

Об’єктом дослідження є тонкі ізотропні замкнені за напрямною конічні оболонки з круговою серединною поверхнею в поперечному перерізі, товщина яких змінюється у одному чи у двох координатних напрямках, що знаходяться під дією розподіленого та локального навантаження.

Предметом дослідження є аналіз напружено-деформованого стану оболонок вказаного класу, зокрема розподілу таких його характеристик як переміщення та напруження в залежності від кута розхилу конуса, змінної товщини, різних граничних умов і навантаження.

Методи дослідження: дослідження проводились у рамках класичної теорії оболонок. На основі вихідних рівнянь сформульовано двовимірну крайову задачу для системи рівнянь у частинних похідних, яка зводиться до одновимірної введенням доповняльних функцій та розкладу в ряди Фур’є, а остання розв’язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації з застосуванням в процесі обчислення дискретних рядів Фур’є.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в таких положеннях, що виносяться на захист:

- на основі рівнянь моментної класичної теорії оболонок виведено розв’язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, яка описує напружено-деформований стан замкнених за напрямною конічних оболонок змінної товщини, сформульовано різні варіанти граничних умов на контурах;
- розроблено ефективний підхід до розв’язання задач статки конічних оболонок змінної товщини під дією нерівномірно розподіленого навантаження для різних варіантів граничних умов, що базується на введенні в розв’язувальну систему доповняльних функцій, що дозволяє звести двовимірну задачу до одновимірної з застосуванням звичайних рядів Фур’є і використати для розв’язання одновимірної крайової задачі стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації, який реалізовано в програмному комплексі на ПК і на кожному кроці якого значення доповняльних функцій розраховуються за допомогою дискретних рядів Фур’є;
- проведено розв’язання задач даного класу та виконано дослідження напружено-деформованого стану конічних оболонок для різних кутів розхилу

конуса, при зміні геометричних параметрів, навантаження та граничних умов, виявлено ряд закономірностей в розподілі полів переміщень та напружень.

Достовірність одержаних в роботі результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі класичної теорії оболонок, коректністю формулювання задачі, тестуванням розробленого підходу на ряді задач даного класу і контролем точності розрахунків на основі індуктивних оцінок.

Практичне значення одержаних результатів. Результати розв'язання задач статички кінчних оболонок змінної товщини на основі ефективного алгоритму, який реалізовано в програмному комплексі на мові C++ для ПК, та проведеного аналізу напружено-деформованого стану оболонок вказаного класу в залежності від зміни геометричних параметрів, навантаження та умов закріплення контурів можуть бути використані в науково-дослідних організаціях і конструкторських бюро для проведення розрахунків з оцінки міцності і деформативності елементів конструкцій сучасної техніки.

Особистий внесок здобувача. В роботах [1-3] опублікованих у співавторстві з науковим керівником, дисертанту належить виведення розв'язувальних рівнянь, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач, співавтору належить постановка задач і методика їх розв'язування, аналіз результатів.

В роботі [4] дисертантом досліджено вплив локалізованого навантаження на напружений стан кінчних оболонок в залежності від параметрів оболонки та інтервалу прикладання навантаження.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на:

1. Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Україна, Львів, 2005);
2. Міжнародній науковій конференції "Математичні проблеми технічної механіки" (Україна, Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2006);
3. Наукових семінарах відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2002-2007);
4. Науковому семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за напрямком "Механіка оболоноквих систем" (Київ, 2007);
5. Семінарі кафедри теоретичної і прикладної механіки Національного транспортного університету Міністерства освіти та науки України (Київ, 2007);
6. Семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (Київ, 2007).

Публікації. За результатами дисертації опубліковано шість робіт, в тому числі: чотири статті у фахових спеціалізованих журналах [1-4], які входять в перелік ВАК, а також дві роботи у матеріалах конференцій [5-6].

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 149 сторінок, в тому числі 22 рисунки, 16 таблиць, список використаних джерел із 148 найменувань на 16 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі описано сучасний стан проблеми, що розглядається в дисертаційній роботі, обґрунтовано актуальність вибраної теми. Сформульовано мету та задачі дослідження, розкрито наукову новизну та практичне значення одержаних результатів.

У першому розділі наведено огляд наукових робіт, присвячених розв'язанню задач про напружений стан кругових та некругових циліндричних та конічних оболонки у класичній та уточненій постановках аналітичними і чисельними методами.

Важливу роль у розробці загальної теорії оболонки зіграли праці С. П. Тимошенка, В. З. Власова, О. Л. Гольденвейзера, О. М. Кільчевського, А. І. Лур'є, А. Лява, Х. М. Муштарі, В. В. Новожилова та ін.

Прийняття класичної моделі теорії пластин та оболонки, в основі якої лежать гіпотези Кірхгофа-Лява, що має досить просте математичне формулювання, дало змогу достатньо точно розв'язувати велику кількість практичних задач.

Однак найбільш досліджені конічні оболонки з товщиною, змінною тільки в напрямку твірної, коли двовимірна крайова задача може бути зведена до розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою відокремлення змінних.

Тобто проведений аналіз робіт показав, що дослідженню напруженого стану конічних оболонки змінної в обох напрямках товщини при різних граничних умовах та навантаженні присвячено небагато робіт, в яких при розв'язанні задач отримані наближені результати за рахунок тих чи інших спрощень. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці ефективного підходу до розв'язання задач такого класу та його реалізації в обчислювальному комплексі на ПК, що дозволило б дослідити вплив різних параметрів закону зміни товщини оболонки, характеру розподілу поверхневих навантажень на фактори її напружено-деформованого стану, з метою з'ясування деяких закономірностей, необхідних для оцінки міцності та надійності елементів конструкцій і деталей машин подібної форми.

У другому розділі наведено основні рівняння класичної теорії оболонки. Виведено розв'язувальну систему рівнянь для конічних оболонки змінної товщини.

Розглядаються тонкі ізотропні конічні оболонки з круговою серединною поверхнею під дією розподілених поверхневих навантажень, виходячи з класичної теорії оболонки, які віднесено до ортогональної системи координат s, θ, γ , де $s = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ – лінії головних кривин серединної поверхні (сімейства напрямних та твірних), а γ – нормальна координата до серединної поверхні оболонки.

Виходячи з основних співвідношень класичної теорії оболонок після ряду перетворень отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружено-деформований стан конічних оболонок змінної товщини:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_r}{\partial s} &= -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}N_r + \frac{\nu\sin\varphi}{r}N_z - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 M_s}{\partial\theta^2} + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right) + \\
&+ \frac{(1-\nu^2)D_N}{r^2}u_r - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right) + \frac{(1-\nu^2)D_N}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \\
&- \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_M\mathcal{G}_s) - q_r; \\
\frac{\partial N_z}{\partial s} &= -\frac{\cos\varphi}{r}N_z - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta} + \frac{4\sin\varphi}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0 D_N}\bar{S}\right) + \frac{\nu\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 M_s}{\partial\theta^2} - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right) + \\
&+ \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right) - \frac{2(1-\nu)}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right) + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \\
&+ \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_M\mathcal{G}_s) + \frac{2(1-\nu)}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial\mathcal{G}_s}{\partial\theta}\right) - q_z; \\
\frac{\partial\bar{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu\cos\varphi}{r}\frac{\partial N_r}{\partial\theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r}\frac{\partial N_z}{\partial\theta} - \frac{2\cos\varphi}{r}\bar{S} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial M_s}{\partial\theta} + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right) - \\
&- \frac{(1-\nu^2)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_N u_r) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right) - \frac{1-\nu^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_N\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \\
&- \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_M\mathcal{G}_s) - q_\theta; \tag{1} \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \sin\varphi N_r - \cos\varphi N_z - \frac{4\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0 D_N}\bar{S}\right) - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}M_s - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right) + \\
&+ \frac{2(1-\nu)}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right) + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right) + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \\
&- \frac{2(1-\nu)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial\mathcal{G}_s}{\partial\theta}\right) + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^2}(D_M\mathcal{G}_s); \\
\frac{\partial u_r}{\partial s} &= \frac{\cos^2\varphi}{D_N}N_r + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N}N_z - \frac{\nu\cos\varphi}{r}u_r - \frac{\nu\cos\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \sin\varphi\mathcal{G}_s; \\
\frac{\partial u_z}{\partial s} &= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N}N_r + \frac{\sin^2\varphi}{D_N}N_z - \frac{\nu\sin\varphi}{r}u_r - \frac{\nu\sin\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \cos\varphi\mathcal{G}_s; \\
\frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{(1-\nu)p_0 D_N}\bar{S} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{4D_M}{r^2 p_0 D_N} - 1\right)\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r}v - \frac{4\sin\varphi}{r^2 p_0}\frac{D_M}{D_N}\frac{\partial\mathcal{G}_s}{\partial\theta};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial s} = \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \nu}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} g_s,$$

$$\text{де } p_0 = 1 + \frac{4 \sin^2 \varphi}{r^2} \frac{D_M}{D_N};$$

$$D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h = h(s, \theta); \quad (2)$$

$$N_r = N_s \cos \varphi + \left(Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \sin \varphi, \quad N_z = N_s \sin \varphi - \left(Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \cos \varphi, \quad \hat{S} = S + \frac{2 \sin \varphi}{r} H;$$

N_s, Q_s, S – зусилля, M_s, H – моменти;

$$u_r = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi;$$

u, v, w – компоненти вектора переміщень;

$$g_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s} \text{ – кут повороту нормалі;}$$

q_r, q_z, q_θ – компоненти поверхневого навантаження;

r, z – напрямки вздовж радіуса та вздовж осі обертання оболонки.

В формулах (2) $h=h(s, \theta)$ – товщина оболонки, що змінюється в двох координатних напрямках.

Для знаходження довільностей, що містяться в загальному розв'язку системи (1), потрібно задавати по 4 граничні умови на кожному контурі. Можуть бути задані умови жорсткого закріплення, шарнірного закріплення, шарнірного спірання та вільного контуру.

Отже крайова задача про напружено-деформований стан тонких конічних оболонок змінної товщини формулюється системою диференціальних рівнянь у частинних похідних (1) з граничними умовами на контурах.

У третьому розділі розроблено методику розв'язання отриманої двовимірної крайової задачі. Запропонований підхід базується на введенні доповняльних функцій, що знаходяться за допомогою дискретних рядів Фур'є, та на відокремленні змінних і зведенні задачі до одновимірної, яка розв'язується методом дискретної ортогоналізації в напрямку напрямної. На його основі побудовано алгоритм, який реалізовано в програмному комплексі на ПК.

Якщо б жорсткості D_N та D_M в розв'язувальній системі (1) залежали тільки від однієї координати s , можна було б відокремити змінні за допомогою рядів Фур'є по цій координаті та звести двовимірну задачу до одновимірної. Однак у випадку товщини змінної в двох напрямках, жорсткості D_N та D_M залежать як від продольної, так і від окружної координати, і відокремити змінні за допомогою рядів Фур'є не вбачається можливим.

Для того, щоб звести таку задачу до одновимірної, вводяться 15 доповняльних функцій, які залежать від двох координат і включають в себе члени, що заважають відокремленню змінних в системі (1):

$$\begin{aligned}
\psi_1^j &= D_M \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \vartheta_s \right\}, (j=1,2,3,4); \\
\psi_2^j &= D_N \left\{ u_r, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2); \\
\psi_3^j &= \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2); \\
\psi_4^j &= \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \bar{S}, \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2,3); \\
\psi_5^j &= \frac{1}{D_N} \{N_r, N_z\}, (j=1,2); \\
\psi_6 &= \frac{1}{p_0 D_N} \bar{S}; \\
\psi_7 &= \frac{1}{D_M} M_s.
\end{aligned} \tag{3}$$

Після того, як підставляємо доповняльні функції (3) в розв'язувальну систему (1), отримуємо систему диференціальних рівнянь, що складається з 8 рівнянь, але містить 23 невідомі функції – 8 розв'язувальних плюс 15 доповняльних, які виражаються через розв'язувальні:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_r}{\partial s} &= -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} N_r + \frac{\nu\sin\varphi}{r} N_z - \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \\
&+ \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_2^1 - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_2^2 - \\
&- \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^3}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1^4}{\partial \theta^2} - q_r; \\
\frac{\partial N_z}{\partial s} &= -\frac{\cos\varphi}{r} N_z - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta} + \frac{4\sin\varphi}{r^3} \frac{\partial \psi_4^1}{\partial \theta} + \frac{\nu\cos\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^2}{\partial \theta^2} - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^3}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1^4}{\partial \theta^2} + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \psi_3^2}{\partial \theta} - q_z; \\
\frac{\partial \bar{S}}{\partial s} &= \frac{\nu\cos\varphi}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r} \frac{\partial N_z}{\partial \theta} - \frac{2\cos\varphi}{r} \bar{S} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^1}{\partial \theta} - \\
&- \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial \psi_2^1}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^2}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial \psi_2^2}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^3}{\partial \theta} - \\
&- \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \frac{\partial \psi_1^4}{\partial \theta} - q_\theta; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \sin\varphi N_r - \cos\varphi N_z - \frac{4\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial \psi_4^1}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} M_s - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \psi_1^1 +
\end{aligned} \tag{4}$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \psi_1^2 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_1^3 -$$

$$- \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial \psi_3^2}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^2} \psi_1^4;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial s} = \cos^2 \varphi \cdot \psi_5^1 + \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_5^2 - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi g_s;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial s} = \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_5^1 + \sin^2 \varphi \cdot \psi_5^2 - \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \varphi g_s;$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{2}{1-\nu} \psi_6 - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \psi_4^2 - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} v - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \psi_4^3;$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial s} = \psi_7 + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} g_s.$$

Після введення таких доповняльних функцій система у вигляді (4) вже дозволяє відокремити змінні, якщо розкласти розв'язувальні, доповняльні функції і навантаження в ряди Фур'є в окружному напрямку:

$$X(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(s) \cos \lambda_n \theta, \quad Y(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(s) \sin \lambda_n \theta; \quad \lambda_n = \frac{n}{2};$$

$$X = \{N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, g_s, \psi_1^j, \psi_2^j, \psi_3^j, \psi_4^j, q_r, q_z\}, \quad Y = \{\bar{S}, v, \psi_3^j, \psi_4^j, \psi_6, q_\theta\}. \quad (5)$$

Після підстановки розкладів (5) в систему (4) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь вже відносно амплітудних значень розв'язувальних та доповняльних функцій:

$$\frac{dN_r^n}{ds} = -\frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} N_r^n + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_z^n - \frac{\cos \varphi}{r} \lambda_n \bar{S}^n + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n -$$

$$- \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^1 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^2 +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 - q_r;$$

$$\frac{dN_z^n}{ds} = -\frac{\cos \varphi}{r} N_z^n - \frac{\sin \varphi}{r} \lambda_n \bar{S}^n + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 - \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \lambda_n \psi_{3,n}^1 -$$

$$- \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 - \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^2 - q_z;$$

$$\frac{d\bar{S}^n}{ds} = \frac{\nu \cos \varphi}{r} \lambda_n N_r^n + \frac{\nu \sin \varphi}{r} \lambda_n N_z^n - \frac{2 \cos \varphi}{r} \bar{S}^n + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n M_s^n -$$

$$- \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^1 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^2 +$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^3 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{1,n}^4 - q_\theta; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_s^n}{ds} &= \sin \varphi N_r^n - \cos \varphi N_r^n - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} M_s^n - \\
&\quad - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^1 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^1 + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^2 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^3 - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \lambda_n \psi_{3,n}^2 + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^2} \psi_{1,n}^4; \\
\frac{du_r^n}{ds} &= \cos^2 \varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \lambda_n v^n - \sin \varphi \mathcal{G}_s^n; \\
\frac{du_z^n}{ds} &= \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin^2 \varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \lambda_n v^n + \cos \varphi \mathcal{G}_s^n; \\
\frac{dv^n}{ds} &= \frac{2}{1-\nu} \psi_{6,n} + \frac{\cos \varphi}{r} \lambda_n u_r^n + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \psi_{4,n}^2 + \frac{\sin \varphi}{r} \lambda_n u_z^n + \frac{\cos \varphi}{r} v^n - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \psi_{4,n}^3; \\
\frac{d\theta_s^n}{ds} &= \psi_{7,n} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_r^n + \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_z^n - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n v^n - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s^n.
\end{aligned}$$

Це система $8N$ рівнянь, де N – кількість членів рядів Фур'є в розкладах (5), однак невідомих в системі більше, оскільки в неї входять як амплітудні значення розв'язувальних функцій, так і амплітудні значення доповняльних функцій. До системи додаються граничні умови у вигляді

$$\begin{aligned}
B_1 \bar{Z}(0) &= \bar{b}_1; & B_2 \bar{Z}(L) &= \bar{b}_2; \\
\bar{Z}(s) &= \{N_{r,n}, N_{z,n}, \hat{S}_n, M_{s,n}, u_{r,n}, u_{z,n}, v_n, \mathcal{G}_{s,n}\}^T.
\end{aligned} \tag{7}$$

В результаті отримуємо одновимірну крайову задачу (6)–(7).

За метод розв'язання цієї задачі вибрано чисельний метод дискретної ортогоналізації. Цей метод дозволяє уникнути нестійкості розрахунку шляхом ортогоналізації векторів-розв'язків в окремих точках інтервалу. Тобто в початковій точці формується система лінійних незалежних векторів-розв'язків з урахуванням граничних умов на лівому краї інтервалу, а потім у всіх інших точках методом Рунге-Куты четвертого порядку точності розв'язуються задачі Коші. При цьому в деяких фіксованих точках (точках ортогоналізації) вектори-розв'язки ортогоналізуються.

Однак в запропонованому нетрадиційному підході в метод дискретної ортогоналізації внесено процедуру визначення в процесі інтегрування амплітудних значень доповняльних функцій (3). Як видно з (3) доповняльні функції виражаються через розв'язувальні функції та їх похідні. Для знаходження амплітудних значень доповняльних функцій застосовується такий прийом. При інтегруванні системи (6) в кожній фіксованій точці по довжині оболонки розраховуємо в ряді точок за прямою значення доповняльних функцій згідно з виразами:

$$\begin{aligned}
\psi_1^1(s_k, \theta_r) &= -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N u_r^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_1^2(s_k, \theta_r) &= -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N u_z^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_1^3(s_k, \theta_r) &= D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N v^n(s_k) \lambda_n \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_1^4(s_k, \theta_r) &= D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N g_s^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_2^1(s_k, \theta_r) &= D_N(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N u_r^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_2^2(s_k, \theta_r) &= D_N(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N v_r^n(s_k) \lambda_n \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_3^1(s_k, \theta_r) &= -\frac{D_M(s_k, \theta_r)}{p_0(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N u_z^n(s_k) \lambda_n \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_3^2(s_k, \theta_r) &= -\frac{D_M(s_k, \theta_r)}{p_0(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N g_s^n(s_k) \lambda_n \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_4^1(s_k, \theta_r) &= \frac{D_M(s_k, \theta_r)}{p_0(s_k, \theta_r) D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N \widehat{S}^n(s_k) \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_4^2(s_k, \theta_r) &= -\frac{D_M(s_k, \theta_r)}{p_0(s_k, \theta_r) D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N u_z^n(s_k) \lambda_n \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_4^3(s_k, \theta_r) &= -\frac{D_M(s_k, \theta_r)}{p_0(s_k, \theta_r) D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N g_s^n(s_k) \lambda_n \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_5^1(s_k, \theta_r) &= \frac{1}{D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=0}^N N_r^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_5^2(s_k, \theta_r) &= \frac{1}{D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=0}^N N_z^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_6(s_k, \theta_r) &= \frac{1}{p_0(s_k, \theta_r) D_N(s_k, \theta_r)} \sum_{n=1}^N \widehat{S}^n(s_k) \sin \lambda_n \theta_r ; \\
\psi_7(s_k, \theta_r) &= \frac{1}{D_M(s_k, \theta_r)} \sum_{n=0}^N M_s^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r .
\end{aligned} \tag{8}$$

Ці вирази отримано з (3) за допомогою розкладів (5). Отримуємо набір значень доповняльних функцій на інтервалі $[0; 2\pi]$ по окружній координаті. Продовжуємо отримані значення на інтервал $[2\pi; 4\pi]$ для парних функцій парним чином, для непарних – непарним і знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є для дискретно заданої функції по цим значенням доповняльних функцій на подвоєному інтервалі. Таким чином знаходимо амплітудні значення доповняльних функцій, які підставляємо в систему (6) і продовжуємо інтегрування по твірній. При цьому чим більше розрахункових точок обираємо, тим коефіцієнти дискретного ряду все менше відрізняються від точних значень коефіцієнтів ряду Фур'є, що дозволяє досягати необхідної точності.

Після задоволення в кінцевій точці інтегрування граничних умов на кінці інтервалу, в точках видачі результатів розраховуються амплітудні значення розв'язувальних функцій, які ми підставляємо в розклади (5) і отримуємо значення розв'язувальних функцій в усіх заданих точках інтервалу.

Наведено блок-схему алгоритму, розробленого з використанням даної методики, перелік програм загального призначення та зазначено принципи побудови спеціальних підпрограм програмного комплексу в залежності від закону зміни товщини оболонки, граничних умов та поверхневого навантаження. Надано приклади.

У четвертому розділі за допомогою розробленого підходу розв'язано задачі статички тонких кінчних оболонок змінної в одному чи в двох координатних напрямках товщини під дією нормального рівномірно та нерівномірно розподіленого навантаження та проведено аналіз впливу геометричних параметрів оболонки, навантаження, граничних умов та законів зміни товщини на напружено-деформований стан кінчних оболонок.

Обґрунтовано достовірність отриманих результатів та на базі ряду індуктивних засобів показано достатню точність розв'язання задач даного класу.

Розв'язано задачі про напружений стан кінчних оболонок при зміні їх товщини в двох координатних напрямках і збереженні ваги. Розглянуто оболонки, товщина яких змінюється згідно закону:

$$h(s, \theta) = \frac{H}{1-\gamma/3} \left[1 - \gamma \left(\frac{2s}{L} - 1 \right)^2 \right] \cdot (1 + \beta \cos \theta) \quad (9)$$

(0 ≤ s ≤ L, 0 ≤ θ ≤ 2π, -1 ≤ γ ≤ 1, 0 ≤ β ≤ 1, H = const).

Об'єм (а значить і вага) таких оболонок залишається незмінним при різних значеннях параметрів γ і β .

На рис. 1 наведено результати розв'язання задачі, в якій при жорсткому закріпленні на обох торцях і нормальному навантаженні, що змінюється згідно закону $q = q_0(1 + 0,1 \cos \theta)$, необхідно знайти таке значення параметра β , при якому розподіл прогину по напрямній в перерізі $s = L/2$ буде якомога більш рівномірним, що досягається при $\beta = 0,22$. Задача розв'язувалась при товщині, змінній тільки в коловому напрямку ($\gamma = 0$ в (9)), при $L = 30$, $H = 0,25$; середній радіус (радіус при $s = L/2$) $R = 30$, півкут розхилу конуса $\alpha = 90^\circ - \varphi = 30^\circ$.

В роботі також наведено розподіли прогину та напружень для жорстко закріпленої на обох торцях кінчної оболонки з товщиною, змінною в двох напрямках згідно закону (9), що знаходиться під дією рівномірного поверхневого навантаження $q = q_0 = const$. Задачу розв'язано при $L = 30$, $H = 0,25$; середній радіус $R = 30$, $\alpha = 90^\circ - \varphi = 30^\circ$.

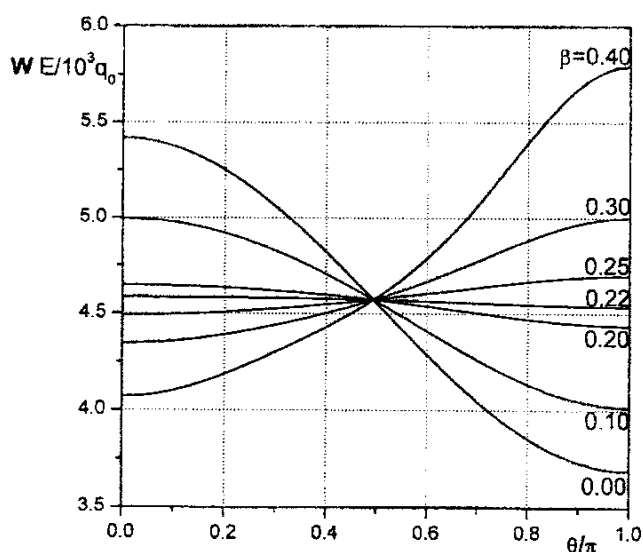


Рис. 1. Розподіл прогину по напрямній в перерізі $s=L/2$ при різних значеннях β .

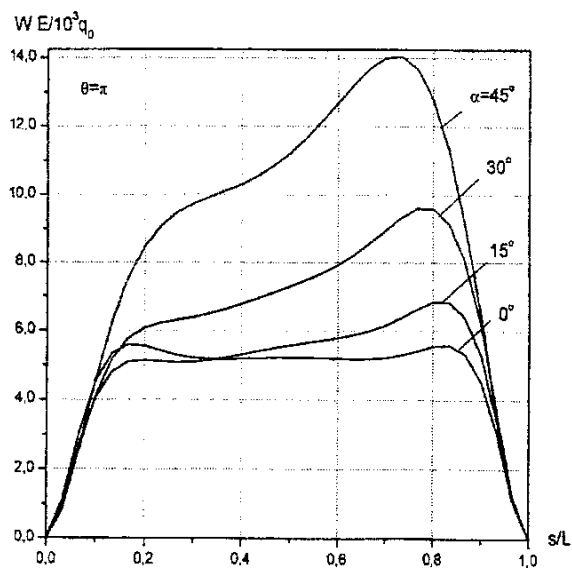


Рис. 2. Розподіл прогину вздовж твірної для різних кутів розхилу конуса.

Були проведені дослідження напружено-деформованого стану конічних оболонок змінної в окружному напрямку товщини в залежності від кута розхилу конуса і параметрів товщини. Розглянуто задачу для конічної оболонки з кутом розхилу 2α ($\alpha = \pi/2 - \varphi$) і товщиною, що змінюється згідно закону $h(\theta) = H(1 + \beta \cos \theta)$, при рівномірному нормальному навантаженні $q = q_0 = const$ та жорсткому закріпленні торців. Прийнято, що зі зміною кута розхилу конуса твірна повертається навколо середнього радіуса R_{cp} (радіус при $s=L/2$) не змінюючи своєї довжини. Задачу розв'язано для таких даних: $L=30$; $R_{cp}=30$; $H=0,25$; $\beta=0,0;0,2;0,3;0,4$; $\alpha=0^\circ;15^\circ;30^\circ;45^\circ$. На рис.2 дано розподіл прогину w вздовж твірної для різних кутів розхилу конуса 2α при $\beta=0,4$ і $\theta = \pi$. Також в роботі наведено графіки при $\alpha=30^\circ$ розподілів прогину w і напружень σ^+ і σ^- відповідно на зовнішній та внутрішній поверхнях оболонки вздовж твірної при різних значеннях параметра β . Також розв'язана задача і наведено значення прогину w і напружень σ^+ і σ^- для оболонок з параметрами: $L=50$; $R_{cp}=25$; $H=0,25$; $\beta=0,2;0,4$; $\alpha=15^\circ;30^\circ;45^\circ$ по твірній та напрямній, що показують значний вплив кута розхилу конуса на напружено-деформований стан конічних оболонок.

Досліджено напружено-деформований стан конічних оболонок змінної товщини при різних умовах закріплення країв. Розглянуто задачу про напружено-деформований стан конічної оболонки змінної в окружному напрямку товщини ($\gamma=0$ в законі (9)). Оболонка жорстко закріплена при $s=0$ і вільна при $s=L$ і знаходиться під дією рівномірного нормального навантаження $q=q_0=const$. Задача розв'язувалась при $L=30$; $H=0,25$; $\beta=0,2;0,4$; середній радіус $R=30$, $\alpha=90^\circ - \varphi=0^\circ;15^\circ;30^\circ;45^\circ$. На рис.3 наведено графіки розподілу прогину в залежності від кута розхилу α вздовж твірної при $\beta=0,2$, при цьому суцільною лінією позначені

криві для $\theta=0$, а штриховою – для $\theta=\pi$. На рис. 4 для тієї ж задачі наведено розподіл напружень на зовнішній поверхні оболонки σ^+ по твірній для різних значень β . З отриманих графіків видно закономірність зростання прогинів та затування напружень на вільному кінці оболонки.

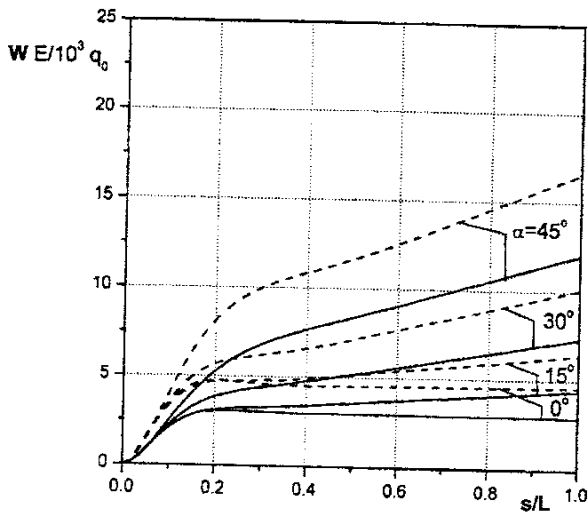


Рис.3. Розподіл прогину при різних умовах на торцях в залежності від кута розхилу конуса.

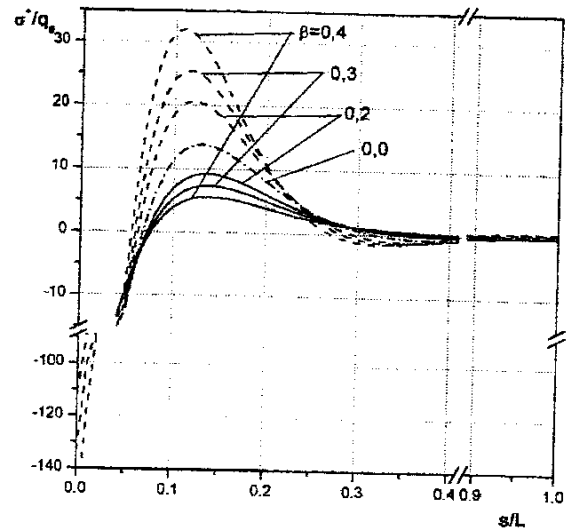


Рис.4. Розподіл напружень на зовнішній поверхні оболонки σ^+ по твірній для різних значень β .

В роботі також розв'язано задачу про напружено-деформований стан

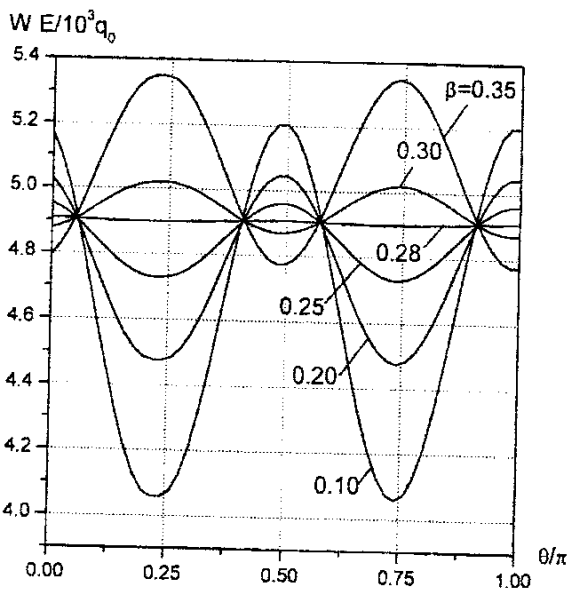


Рис. 5. Розподіл прогину в залежності від амплітуди гофрування по товщині при певному хвилястому навантаженні.

жорстко закріпленої на торцях кінчної оболонки, навантаженої на частині бокової поверхні нормальним навантаженням $q(\theta) = q_0(\cos\theta - \cos\alpha)$, де α – кут розхилу, що відповідає прикладеному локальному навантаженню. Отримано розподіли прогину для різних значень параметрів закону зміни товщини, що дозволяють істотно впливати на напружено-деформований стан кінчних оболонок під дією локального навантаження наведеного типу.

Також в роботі розглянуті кінчні оболонки з гофрованою в окружному напрямку товщиною:

$$h(\theta) = H(1 + \beta \cos(k\theta)). \quad (10)$$

Оболонка знаходиться під дією хвилястого поверхневого навантаження вигляду:

$$q(\theta) = q_0(1 + \gamma \cos(k\theta)). \quad (11)$$

Розглянуто вплив частоти k і амплітуди β гофрування в законі зміни товщини (10) на напружений стан оболонки при постійному навантаженні, тобто при $\gamma = 0$ в (11). Далі розглянуто вплив амплітуди хвилі γ в законі зміни навантаження (11) на напружений стан оболонки при постійній товщині, тобто при $\beta = 0$ в (10). Далі розглянуто задачу про пошук параметрів закону зміни товщини (10) при певному розподілі навантаження у вигляді (11) так, щоб розподіл прогину був максимально наближеним до рівномірного. Для цього зафіксовано $\gamma = 0,1$ і $k = 4$ в (11). На рис.5 наведено розподіл прогину w по θ в середньому перерізі $s=L/2$ при різних значеннях амплітуди гофрування β в законі зміни товщини (10), який показує, що найбільш наближеним до рівномірного буде розподіл прогину при $\beta = 0,28$.

Зазначені ефекти та інші виявлені закономірності наведені у дисертації на графіках та у таблицях.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розроблено ефективний підхід до розв'язання двовимірних задач статички ізотропних конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини при різних граничних умовах та довільному навантаженні, що базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є для зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної та розв'язанні останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз впливу законів зміни товщини, кута розхилу конуса, виду прикладеного нерівномірного навантаження, граничних умов на напружений стан тонких конічних оболонок, в результаті якого виявлено ряд закономірностей розподілу полів переміщень і напружень, що мають практичне значення при оцінці міцності і надійності елементів конструкцій.

При цьому отримано такі конкретні результати:

1. На основі вихідних співвідношень класичної теорії оболонок виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує напружено-деформований стан конічних оболонок змінної товщини в двох координатних напрямках.
2. Розроблено методику розрахунку конічних оболонок змінної товщини, що полягає у введенні доповняльних функцій в розв'язувальну систему рівнянь для зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної і розв'язанні одержаної одновимірної задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації з використанням дискретних рядів Фур'є і при точному задоволенні граничних умов на контурах.
3. Запропонований підхід реалізовано в обчислювальному комплексі для ПК, за допомогою якого можна проводити розрахунки багатоваріантних задач даного класу при різних значеннях параметрів геометричних характеристик оболонок, навантаження, закріплення контурів.

4. Достовірність результатів, що одержані в роботі, зумовлена використанням обґрунтованої математичної моделі класичної теорії оболонок, коректністю формулювання задачі, тестуванням розробленого підходу на ряді задач даного класу і контролем точності розрахунку на основі індуктивних оцінок.
5. На основі запропонованого підходу одержано розв'язки ряду задач і проведено аналіз напруженого стану конічних оболонок змінної товщини при різних умовах закріплення контурів, видах навантаження: розв'язано задачі статички конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини з метою дослідження впливу зміни товщини оболонки при збереженні ваги на фактори напружено-деформованого стану оболонки; досліджено вплив зміни кута розхилу конуса на розподіл напружень та переміщень; проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок при різних умовах закріплення торців; досліджено напружено-деформований стан конічних оболонок під дією локалізованого навантаження; проведено розрахунки та аналіз гофрованих по товщині конічних оболонок в залежності від різних параметрів амплітуди і частоти гофрування, різних видів поверхневого навантаження.
6. Виявлені ефекти і отримані закономірності представлено на графіках і в таблицях.
7. Розроблений на базі запропонованого підходу алгоритм, обчислювальний комплекс для ПК і отримані в роботі результати можуть бути використані в науково-дослідних організаціях для оцінки міцності і деформативності елементів конструкцій, що мають форму конічних оболонок з довільним законом зміни товщини.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Григоренко Я. М., Цыбульник В. А. О применении дискретных рядов Фурье к расчету напряжённого состояния цилиндрических оболочек переменной толщины при произвольном закреплении торцов // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 85-94.
2. Григоренко Я. М., Цыбульник В. А. К решению задачи статички конических оболочек переменной в окружном направлении толщины с применением дискретных рядов Фурье // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 26-37.
3. Григоренко Я. М., Цыбульник В. А. Анализ напряжённо-деформированного состояния конических оболочек переменной в двух направлениях толщины при различных граничных условиях и сохранении веса // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 3. – С. 70-79.
4. Цыбульник В. О. Визначення напружено-деформованого стану конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією

локального поверхневого навантаження // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки – 2005. – Вип. 4. – С. 99-105.

5. Цибульник В. О. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання задачі про напружений стан конічних оболонок змінної товщини // Тези доповідей конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я. С. Підстригача. – Львів, 2005. – С. 179-180.
6. Цибульник В. О. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання задач статички конічних оболонок змінної товщини // Матеріали міжнародної наук. конф. "Математичні проблеми технічної механіки". – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2006. – С. 140.

АНОТАЦІЯ

Цибульник В. О. Розв'язання двовимірних задач статички конічних оболонок змінної товщини на основі апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2007.

Дисертація присвячена розробці ефективного підходу до розв'язання класу задач про напружено-деформований стан тонких замкнених конічних оболонок змінної товщини під дією нерівномірно розподіленого навантаження, при різних умовах закріплення країв, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, який базується на використанні дискретних рядів Фур'є при зведенні двовимірної задачі до одновимірної та застосуванні стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації.

На основі розробленого підходу проведено розрахунки задач та аналіз напруженого стану конічних оболонок при певних умовах на краях оболонки в залежності від геометричних характеристик, виду прикладеного навантаження та змінної в одному чи двох координатних напрямках товщини.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, конічні оболонки змінної товщини, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, напружено-деформований стан.

АННОТАЦИЯ

Цыбульник В. А. Решение двумерных задач статички конических оболочек переменной толщины на основе аппроксимации функций дискретными рядами Фурье. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2007.

Диссертация посвящена разработке эффективного подхода к решению класса задач о напряженно-деформированном состоянии тонких замкнутых конических оболочек переменной толщины под действием неравномерно распределенной нагрузки, при различных условиях закрепления краев, который базируется на применении дискретных рядов Фурье при сведении двумерной задачи к одномерной и использовании устойчивого численного метода дискретной ортогонализации.

Задачи о напряженном состоянии тонких конических оболочек в классической постановке описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка с переменными коэффициентами и граничными условиями на торцах. Для решения данной задачи предлагается подход, основанный на сведении двумерной краевой задачи к одномерной с помощью введения дополнительных функций. Полученная одномерная краевая задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации, на каждом шаге которого дополнительные функции вычисляются с помощью дискретных рядов Фурье.

На основе предложенного подхода разработан алгоритм, реализованный в программном комплексе на языке C++ для ПК, с помощью которого проведен расчет ряда новых задач о напряженно-деформированном состоянии конических оболочек переменной толщины при различных условиях на торцах под действием неравномерно распределенной нагрузки.

Проводился анализ влияния изменения толщины вдоль направляющей и образующей с сохранением веса для замкнутых конических оболочек с круговой срединной поверхностью в поперечном сечении под действием равномерно распределенной нагрузки.

Также для этого класса оболочек исследовалось зависимость факторов напряженного состояния от угла коничности оболочек и вида закрепления краев.

Рассматривались конические оболочки переменной толщины под действием локализованных нагрузок, конические оболочки с круговой срединной поверхностью в поперечном сечении и гофрированной в окружном направлении толщиной, находящиеся под действием равномерной и волнообразной нагрузки. Исследовалось влияние параметров гофрировки (частоты и амплитуды) на напряженно-деформированное состояние оболочек.

Полученные закономерности и выявленные эффекты, приведенные в работе на графиках и в таблицах, могут быть использованы для оценки прочности и надежности элементов конструкций и деталей машин, выполненных в виде конических оболочек.

Ключевые слова: двумерная краевая задача, конические оболочки переменной толщины, дискретные ряды Фурье, метод дискретной ортогонализации, напряжённо-деформированное состояние.

ABSTRACT

Tsibulnik V. A. Solution of the two-dimensional problems of static of variable thickness conical shells on the basis of functions' approximation with discrete Fourier series. – Manuscript.

Thesis for candidates degree of physical and mathematical sciences in speciality 01.02.04 – mechanics of deformable solid. – S. P. Timoshenko Institute of mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2007.

The dissertation is devoted to development of the effective approach to solving of the class of problems on stressed state of thin conical shells under actions of non-uniform distributed loads and various conditions on the edges. It is given by the system of partial differential equations, which is solved on the joint using of stable numerical discrete orthogonalization method and discrete Fourier series.

On the basis of the developed approach it was calculated the problems on stressed state of the shells at certain conditions on the edges depending on shell's geometry, kind of applied loads and variable in one or two coordinate directions thickness.

Key words: two-dimensional boundary problem, conical shells with variable thickness, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method, deflected mode.

Підписано до друку 29.10.2007 р. Формат 60x90/16.
Ум. друк. арк. 0,9. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж 100. Зам. 119.

«Видавництво “Науковий світ”»[®]
Свідоцтво ДК № 249 від 16.11.2000 р.
м. Київ, вул. Боженка, 17, оф. 504.
200-87-13, 200-87-15, 8-050-525-88-77