

УДК 539.3

©2006

Я. М. Григоренко, В. А. Цыбульник

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ  
ТОЛЩИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ  
И СОХРАНЕНИИ ВЕСА**

Наряду с оболочками постоянной толщины в качестве конструктивных элементов широкое применение находят оболочки переменной толщины. В этом случае варьирование закона изменения толщины при сохранении веса конструкции позволяет получить более рациональное напряжённо-деформированное состояние оболочечных элементов [1 – 3]. В частности, это относится и к коническим оболочкам, которые используются как элементы машин, летательных аппаратов и приборов [4].

1. Ниже рассматривается класс задач о напряжённо-деформированном состоянии конических оболочек переменной толщины в двух координатных направлениях на основе точных уравнений моментной теории оболочек при произвольных граничных условиях на торцах под действием поверхностной нагрузки. Срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональной системе координат  $s, \theta$ , где  $s$  – длина дуги по образующей, а  $\theta$  – центральный угол в поперечном сечении. Если радиус окружности в поперечном сечении представить в виде

$$r(s) = r_0 + \cos \varphi \cdot s \quad (1)$$

где  $r_0$  – радиус окружности в плоскости отсчёта по образующей;  $\varphi$  – угол между нормалью к срединной поверхности оболочки и осью вращения  $z$ , тогда разрешающую систему уравнений можно представить в следующем виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial s} = & -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} N_r + \frac{\nu\sin\varphi}{r} N_z - \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} - \\ & - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) + \\ & + \frac{(1-\nu^2)D_N}{r^2} u_r - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} - \\ & - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D_M \vartheta_s) - q_r; \\ \frac{\partial N_z}{\partial s} = & -\frac{\cos\varphi}{r} N_z - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4\sin\varphi}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) + \\ & + \frac{\nu\cos\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} \right) - \\
& - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u_z}{\partial\theta} \right) + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) + \\
& + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (D_M \vartheta_s) + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial\theta} \right) - q_z; \\
& \frac{\partial \hat{S}}{\partial s} = - \frac{\nu\cos\varphi}{r} \frac{\partial N_r}{\partial\theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r} \frac{\partial N_z}{\partial\theta} - \\
& - \frac{2\cos\varphi}{r} \hat{S} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial\theta} + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} \right) - \\
& - \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (D_N u_r) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} \right) - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( D_N \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) - \\
& - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \frac{\partial}{\partial\theta} (D_M \vartheta_s) - q_\theta; \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \sin\varphi N_r - \cos\varphi N_z - \frac{4\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) - \\
& - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} M_s - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} \right) + \\
& + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u_z}{\partial\theta} \right) + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} \right) + \\
& + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) - \\
& - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial\theta} \right) + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^2} (D_M \vartheta_s);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial s} = \frac{\cos^2\varphi}{D_N} N_r + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N} N_z - \frac{\nu\cos\varphi}{r} u_r - \frac{\nu\cos\varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} - \sin\varphi\vartheta_s;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial s} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N} N_r + \frac{\sin^2\varphi}{D_N} N_z - \frac{\nu\sin\varphi}{r} u_r - \frac{\nu\sin\varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \cos\varphi\vartheta_s;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{(1-\nu)p_0 D_N} \hat{S} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{4D_M}{r^2 p_0 D_N} - 1 \right) \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} v - \frac{4 \sin \varphi}{r^2 p_0} \frac{D_M}{D_N} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s; \\ p_0 &= 1 + \frac{4 \sin^2 \varphi}{r^2} \frac{D_M}{D_N}. \end{aligned}$$

При этом ( $0 \leq s \leq L$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ), в (2) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} N_r &= N_s \cos \varphi + \hat{Q}_s \sin \varphi; \quad N_z = N_s \sin \varphi - \hat{Q}_s \cos \varphi; \\ u_r &= u \cos \varphi + w \sin \varphi; \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi; \end{aligned} \quad (3)$$

$$q_r = q_s \cos \varphi + q_\gamma \sin \varphi; \quad q_z = q_s \sin \varphi - q_\gamma \cos \varphi;$$

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}; \quad \hat{S} = S + \frac{2 \sin \varphi}{r} H; \quad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}.$$

В уравнениях (2) и выражениях (3)  $N_s, Q_s, S, M_s, H$  – усилия и моменты;  $u, v, w$  – перемещения;  $q_s, q_\theta, q_\gamma$  – компоненты нагрузки;  $D_N = \frac{E \cdot h(s, \theta)}{1 - \nu^2}$ ,  $D_M = \frac{E \cdot h^3(s, \theta)}{12(1 - \nu^2)}$  –

тангенциальная и изгибная жёсткости;  $h = h(s, \theta)$  – толщина оболочки;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. На торцах оболочки задаются граничные условия.

Таким образом, краевая задача о напряженно-деформированном состоянии конической оболочки описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и соответствующими граничными условиями при  $s = 0$  и  $s = L$ .

2. В общем случае, коэффициенты системы уравнений (2) зависят от переменных  $s$  и  $\theta$ , поэтому разделить переменные не представляется возможным. В данном случае для решения двумерной краевой задачи применим подход, основанный на понижении размерности и сведении задачи к одномерной и применении рядов Фурье для функций, заданных на дискретном множестве точек. Для краткости такие ряды будем называть дискретными рядами Фурье [5, 6]. С указанной целью введём следующие дополнительные функции:

$$\begin{aligned} \psi_1^j &= D_M \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \vartheta_s \right\}, \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad \psi_2^j = D_N \left\{ u_r, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}, \quad (j = 1, 2); \\ \psi_3^j &= \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, \quad (j = 1, 2); \quad \psi_4^j = \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \hat{S}, \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, \quad (j = 1, 2, 3); \quad (4) \\ \psi_5^j &= \frac{1}{D_N} \{N_r, N_z\}, \quad (j = 1, 2), \quad \psi_6 = \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S}, \quad \psi_7 = \frac{1}{D_M} M_s. \end{aligned}$$

Подставим дополнительные функции (4) в разрешающие уравнения (2) и представим разрешающие и дополнительные функции в виде рядов Фурье по координате  $\theta$ .

$$X(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(s) \cos \lambda_n \theta, \quad Y(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(s) \sin \lambda_n \theta; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2}; \quad (5)$$

$$X = \{N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta_s, \psi_1^j, \psi_2^j, \psi_5^j, \psi_7, q_r, q_z\}, \quad Y = \{\hat{S}, v, \psi_3^j, \psi_4^j, \psi_6, q_\theta\}.$$

После подстановки рядов (5) в систему разрешающих уравнений (2) и некоторых преобразований придем к связанной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитудных значений рядов (5), которая принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_r^n}{ds} = & -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} N_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r} N_z^n - \frac{\cos\varphi}{r} \lambda_n \hat{S}^n + \\ & + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^1 + \\ & + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^2 + \\ & + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 - q_r; \\ \frac{dN_z^n}{ds} = & -\frac{\cos\varphi}{r} N_z^n - \frac{\sin\varphi}{r} \lambda_n \hat{S}^n + \frac{4\sin\varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{\nu\cos\varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n + \\ & + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 - \\ & - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \lambda_n \psi_{3,n}^1 - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 - \\ & - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^2 - q_z; \\ \frac{d\hat{S}^n}{ds} = & \frac{\nu\cos\varphi}{r} \lambda_n N_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r} \lambda_n N_z^n - \frac{2\cos\varphi}{r} \hat{S}^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \lambda_n M_s^n - \\ & - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^1 + \\ & + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^2 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^3 + \\ & + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{1,n}^4 - q_\theta; \\ \frac{dM_s^n}{ds} = & \sin\varphi N_r^n - \cos\varphi N_z^n - \frac{4\sin\varphi}{r^2} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} M_s^n - \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1 - \nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^1 + \frac{2(1 - \nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^1 + \\
& + \frac{(1 - \nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^2 + \frac{(1 - \nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_{1,n}^3 - \frac{2(1 - \nu)}{r^2} \lambda_n \psi_{3,n}^2 + \frac{(1 - \nu^2) \cos^2 \varphi}{r^2} \psi_{1,n}^4; \\
\frac{du_r^n}{ds} &= \cos^2 \varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \lambda_n v^n - \sin \varphi \vartheta_s^n; \\
\frac{du_z^n}{ds} &= \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin^2 \varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \lambda_n v^n + \cos \varphi \vartheta_s^n; \\
\frac{dv^n}{ds} &= \frac{2}{1 - \nu} \psi_{6,n} + \frac{\cos \varphi}{r} \lambda_n u_r^n + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \psi_{4,n}^2 + \frac{\sin \varphi}{r} \lambda_n u_z^n + \frac{\cos \varphi}{r} v^n - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \psi_{4,n}^3; \\
\frac{d\vartheta_s^n}{ds} &= \psi_{7,n} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_r^n + \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_z^n - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \lambda_n v^n - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s^n.
\end{aligned}$$

Граничные условия для системы (6) представим в виде

$$B_1 \bar{Z}(0) = \bar{b}_1; \quad B_2 \bar{Z}(L) = \bar{b}_2, \quad (7)$$

где  $\bar{Z}(s) = \{N_{r,n}, N_{z,n}, \hat{S}_n, M_{s,n}, u_{r,n}, u_{z,n}, v_n, \vartheta_{s,n}\}^T$  – вектор-столбец разрешающих функций;  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы;  $\bar{b}_1$  и  $\bar{b}_2$  – векторы.

Входящие в систему (6) функции  $\psi_{1,n}^j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),  $\psi_{2,n}^j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\psi_{3,n}^j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\psi_{4,n}^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\psi_{5,n}^j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\psi_{6,n}$ ,  $\psi_{7,n}$  – амплитудные значения дополнительных функций (4), не выражаются явно через коэффициенты рядов Фурье разрешающих функций, а вычисляются при интегрировании системы (6) с использованием дискретных рядов Фурье на каждом шаге  $s = \text{const}$  и зависят от амплитудных значений разрешающих функций [7 – 10].

Уравнения системы (6) интегрируются одновременно для всех гармоник рядов (5) с помощью численного метода дискретной ортогонализации. В процессе интегрирования для вычисления амплитудных значений дополнительных функций по текущим значениям амплитуд разрешающих функций при  $s = s_k$  ( $k = 0, K$ ) вычисляем в некоторых точках  $\theta_r$  ( $k = 0, K$ ) на интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$  значения амплитуд дополнительных функций и строим ряд Фурье для дискретно заданной функции, применяя схему Рунге [11]. В начале интегрирования учитываются граничные условия на этом крае. После подстановки найденных амплитудных значений дополнительных функций в систему уравнений (6) продолжается интегрирование по  $s$ . При этом вычисляем в точках  $\theta_r$  ( $1 \leq r \leq R$ ) следующие величины:

$$D_M^r, D_N^r, \frac{D_M^r}{P_0^r}, \frac{D_M^r}{P_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_N^r}, \frac{1}{P_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_M^r}.$$

Учитывая полученные значения и выражения дополнительных функций через разрешающие функции (4), получаем равенства

$$\psi_1^1(s_k, \theta_r) = -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N u_r^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r;$$

$$\begin{aligned}\psi_1^2(s_k, \theta_r) &= -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N u_z^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r; \\ \psi_1^3(s_k, \theta_r) &= D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N v^n(s_k) \lambda_n \cos \lambda_n \theta_r; \\ \psi_1^4(s_k, \theta_r) &= D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N \vartheta_s^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r.\end{aligned}\quad (8)$$

Аналогично вычисляются значения всех дополнительных функций.

Используя найденные значения дополнительных функций, строим дискретные ряды Фурье в виде (5), коэффициенты которых являются недостающими амплитудными значениями дополнительных функций при  $s = s_k$  для системы (6). С помощью стандартной процедуры находим их числовые значения [5, 11]. После подстановки этих значений в уравнения системы (6) продолжаем интегрирование по  $s$ , переходя от точки  $s_k$  к точке  $s_{k+1}$ . Решение краевой задачи (6), (7) осуществляем с помощью устойчивого численного метода дискретной ортогонализации, что позволяет получить решение с высокой точностью.

По значениям разрешающих функций можно определить все факторы напряженно-деформированного состояния оболочки.

Используя данный подход, проведем анализ полей перемещений и напряжений конических оболочек переменной в двух координатных направлениях толщины при сохранении веса. Рассмотрим конические оболочки, толщина которых изменяется по закону

$$h(s, \theta) = h_0 \left[ 1 - \gamma \left( \frac{2s}{L} - 1 \right)^2 \right] \cdot (1 + \beta \cos \theta), \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (9)$$

Покажем, что при различных значениях  $\gamma$  и  $\beta$  толщина всей оболочки  $\bar{h} = \int_0^L \int_0^{2\pi} h(s, \theta) ds d\theta$  сохраняет постоянное значение.

Так как выражение  $1 + \beta \cos \theta$  не зависит от  $s$ , можно рассмотреть при изменении  $h$  по  $s$  только выражение

$$h(s) = h_0 \left[ 1 - \gamma \left( \frac{2s}{L} - 1 \right)^2 \right]. \quad (10)$$

В случае оболочки постоянной толщины примем, что  $h = H = \text{const}$ . Тогда, исходя из требования постоянного веса при любом значении коэффициента  $\gamma$ , имеем

$$\int_0^L h(s) ds = \int_0^L H ds, \quad (11)$$

откуда получаем соотношения

$$h_0 \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right) = H \quad \text{или} \quad h_0 = \frac{H}{1 - \gamma/3}, \quad (12)$$

а также имеем равенство

$$\int_0^{2\pi} (1 + \beta \cos \theta) d\theta = 2\pi. \quad (13)$$

На основе формул (11) – (13) приходим к заключению, что толщина всей оболочки при различных  $\gamma$  и  $\beta$  не меняет своего значения, т.е. выполняется требование сохранения веса.

Сначала рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии конической оболочки переменной в окружном направлении толщины, т.е. в выражении (9) полагаем  $\gamma = 0$ . Оболочка жестко закреплена при  $s = 0$  и свободна от нагрузок при  $s = L$  и находится под действием равномерной нормальной нагрузки  $q = q_0 = \text{const}$ . Задача решена при  $L = 30$ :  $H = 0,25$ ;  $\beta = 0,2; 0,4$ ; средний радиус  $R = 30$ ,  $\alpha = 90^\circ - \varphi = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ$ .

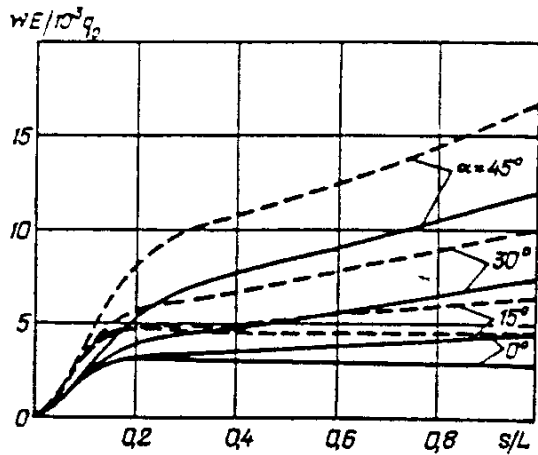


Рис. 1

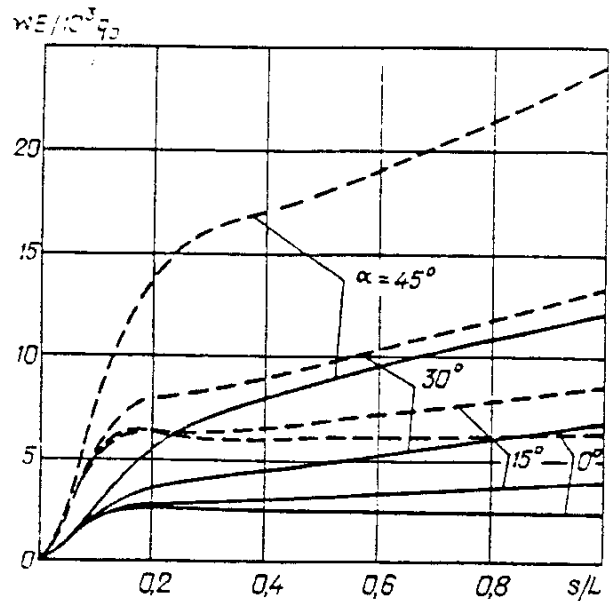


Рис. 2

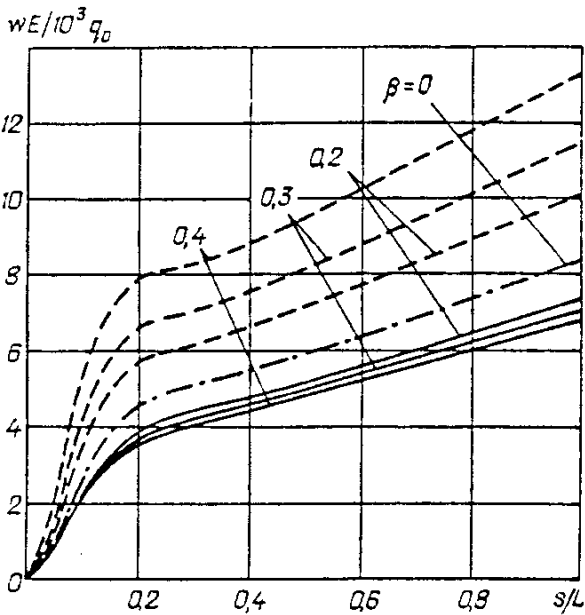


Рис. 3

На рис. 1 приведены графики распределения прогиба в зависимости от угла раствора  $\alpha$  вдоль образующей при  $\beta = 0,2$ , при этом сплошной линией обозначены кривые для  $\theta = 0$ , а штриховой – для  $\theta = \pi$ . Аналогичные графики для  $\beta = 0,4$  приведены на рис. 2. Из рис. 1 видно, что при изменении толщины по направляющей с сохранением веса и  $\beta = 0,2$  при  $\alpha = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ$  различие величины прогиба на краю  $s = L$  для  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  выражается отношениями: 1,53; 1,43; 1,37; 1,33.

При  $\beta = 0,4$  из рис. 2 получаем, что соответствующие отношения равны 2,7; 2,2; 1,9; 2,0. Следовательно, с увеличением  $\beta$  различие в величинах прогиба при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  увеличивается, не изменяя величины веса оболочки.

На рис. 3 показано для данной задачи как влияет на распределение прогиба по образующей изменение толщины по направляющей. Сплошными линиями обозначены кривые для  $\theta = 0$ , а штриховыми – для  $\theta = \pi$ . На крае  $s = L$  значения прогиба при  $\theta = 0$  в зависимости от  $\beta$  характеризуются отношениями: 1,22; 1,38; 1,60 (относительно прогиба при  $\beta = 0$ ). Следовательно, не изменяя веса оболочки можно влиять на величину прогиба за счет изменения толщины по направляющей.

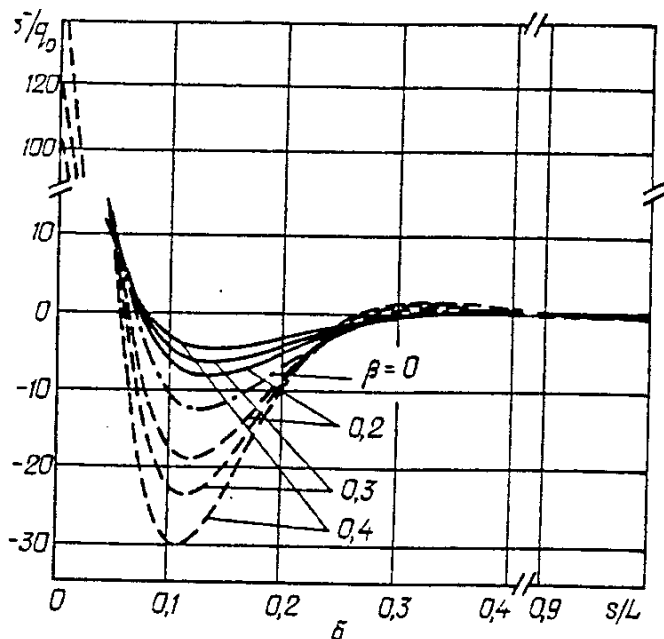
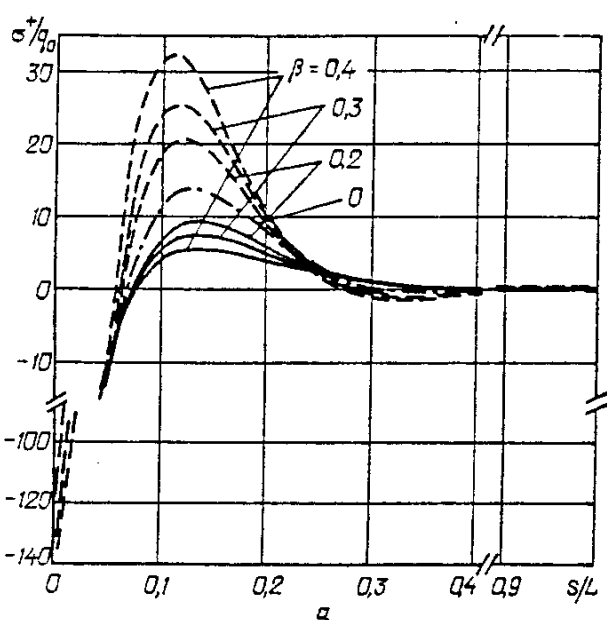


Рис. 4

На рис. 4 (а, б) для той же задачи приведены распределения напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки ( $\sigma^{\pm}$ ) по образующей для различных значений  $\beta$ . Видно, что наибольшей величины напряжения достигают на жестко закрепленном контуре и после локального экстремума на некотором расстоянии от этого края они затухают.

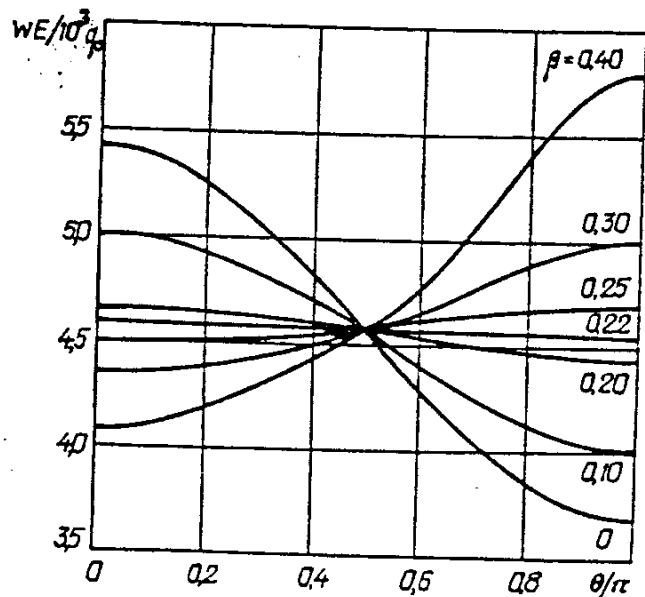


Рис. 5

На рис. 5 приведены результаты для следующей задачи: при жестком закреплении обоих торцов и нормальной нагрузке, изменяющейся по закону  $q = q_0(1 + 0,1 \cos \theta)$ , требуется определить такое значение  $\beta$ , при котором распределение прогиба по направляющей в сечении  $s = L / 2$  будет наиболее равномерным. Как видно из рисунка, такой результат достигается при  $\beta = 0,22$ .

Таблица 1

$s/L$	$\theta/\pi$	$w E / 10^3 q_0$								
		$\gamma = 0$			$\gamma = 0,4$			$\gamma = 0,4$		
		$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$
0,2	0	3,518	2,963	2,594	3,659	3,112	2,883	3,412	2,876	2,556
0,4		4,196	3,604	3,132	3,706	3,215	3,002	4,668	4,013	3,529
0,6		5,047	4,318	3,743	4,458	3,842	3,487	5,608	4,796	4,191
0,8		5,442	4,557	4,078	5,800	4,871	4,399	5,196	4,350	3,926
0,2	0,5	3,518	3,510	3,484	3,659	3,641	3,564	3,412	3,407	3,386
0,4		4,196	4,189	4,168	3,706	3,694	3,640	4,668	4,663	4,637
0,6		5,047	5,038	5,009	4,458	4,446	4,400	5,608	5,599	5,571
0,8		5,442	5,458	5,511	5,800	5,806	5,825	5,196	5,217	5,287
0,2	1,0	3,518	4,433	6,081	3,659	4,548	5,855	3,412	4,309	5,877
0,4		4,196	5,112	6,783	3,706	4,491	5,709	4,668	5,677	7,432
0,6		5,047	6,116	7,932	4,458	5,376	6,786	5,608	6,797	8,753
0,8		5,442	6,958	9,597	5,800	7,344	9,865	5,196	6,672	9,260

В табл. 1, 2, 3 приведены распределения прогиба и напряжений для жестко закрепленной на обоих торцах конической оболочки с толщиной, переменной в двух направлениях, находящейся под действием равномерной нормальной нагрузки  $q = q_0 = \text{const}$ . Результаты представлены для различных значений  $\gamma$  и  $\beta$  по образующей и направляющей при сохранении веса оболочки.

Таблица 2

s/L	$\theta / \pi$	$\sigma^+$								
		$\gamma = 0$			$\gamma = 0,4$			$\gamma = 0,4$		
		$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$
0	0	-64,20	-47,49	-32,33	-87,33	-65,00	-49,31	-54,00	-40,17	-27,99
0,2		6,35	4,66	2,46	4,76	4,01	3,54	6,14	4,25	2,33
0,4		-0,72	-0,48	-0,53	-1,50	-1,09	-0,07	-0,06	0,11	0,08
0,6		-0,87	-0,08	0,08	-2,51	-1,42	-0,36	0,47	1,03	0,95
0,8		15,69	11,44	7,13	13,39	10,28	6,63	15,05	10,61	6,58
1,0		-82,28	-60,33	-41,68	-113,0	-82,71	-58,37	-68,73	-50,57	-35,18
0	0,5	-64,20	-62,78	-58,08	-87,33	-85,34	-78,33	-54,00	-52,80	-48,70
0,2		6,35	5,95	4,81	4,76	4,42	3,24	6,14	5,74	4,47
0,4		-0,72	-0,74	-0,80	-1,50	-1,53	-1,72	-0,06	-0,09	-0,22
0,6		-0,87	-0,79	-0,53	-2,51	-2,40	-2,12	0,47	0,53	0,69
0,8		15,69	15,08	13,13	13,39	12,83	11,11	15,05	14,46	12,60
1,0		-82,28	-80,86	-76,01	-113,0	-111,0	-104,5	-68,73	-67,54	-63,51
0	1,0	-64,20	-87,40	-126,3	-87,33	-118,8	-165,9	-54,00	-73,07	-103,9
0,2		6,35	7,55	7,63	4,76	4,61	1,88	6,14	7,88	8,68
0,4		-0,72	-0,69	0,00	-1,50	-1,49	-1,10	-0,06	-0,04	0,49
0,6		-0,87	-1,90	-2,41	-2,51	-3,57	-4,03	0,47	-0,46	-1,16
0,8		15,69	19,64	21,85	13,39	15,23	13,75	15,05	19,84	23,95
1,0		-82,28	-112,3	-159,9	-113,0	-155,0	-220,6	-68,73	-93,50	-132,3

Таблица 3

s/L	$\theta / \pi$	$\sigma^-$								
		$\gamma = 0$			$\gamma = 0,4$			$\gamma = 0,4$		
		$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$
0	0	59,06	42,97	28,76	82,44	60,65	45,48	48,71	35,49	24,23
0,2		-5,84	-4,21	-2,19	-4,38	-3,63	-3,16	-5,64	-3,84	-2,07
0,4		0,66	0,43	0,47	1,36	0,98	0,06	0,06	-0,10	-0,07
0,6		0,80	0,07	-0,07	2,28	1,26	0,31	-0,44	-0,94	-0,85
0,8		-14,44	-10,35	-6,35	-12,33	-9,31	-5,91	-13,83	-9,59	-5,85
1,0		75,70	54,58	37,09	106,7	77,18	53,83	62,00	44,68	30,45
0	0,4	59,06	57,76	53,43	82,44	80,56	73,94	48,71	47,63	43,93
0,2		-5,84	-5,48	-4,42	-4,38	-4,07	-2,98	-5,64	-5,27	-4,11
0,4		0,66	0,68	0,73	1,36	1,39	1,57	0,06	0,08	0,20
0,6		0,80	0,72	0,49	2,28	2,18	1,93	-0,44	-0,49	-0,64
0,8		-14,44	-13,87	-12,08	-12,33	-11,82	-10,23	-13,83	-13,30	-11,58
1,0		75,70	74,39	69,93	106,7	104,8	98,64	62,00	60,93	57,29
0	1,0	59,06	81,76	120,1	82,44	113,4	160,2	48,71	67,29	97,75
0,2		-5,84	-7,06	-7,26	-4,38	-4,32	-1,79	-5,64	-7,36	-8,26
0,4		0,66	0,65	-0,00	1,36	1,38	1,04	0,061	0,04	-0,47
0,6		0,80	1,77	2,29	2,28	3,31	3,80	-0,44	0,44	1,11
0,8		-14,44	-18,37	-20,78	-12,33	-14,26	-13,09	-13,83	-18,54	-22,78
1,0		75,70	105,1	152,1	106,7	148,0	213,1	62,00	86,11	124,4

Таким образом, из результатов, приведенных на рис. 1 – 5 и в табл. 1 – 3, следует, что варьируя коэффициентами  $\gamma$  и  $\beta$  в законе изменения толщины (9), можно при сохранении веса оболочки выбрать определенные их значения, чтобы получить наиболее рациональное распределение прогиба и напряжений.

**РЕЗЮМЕ.** На основі розробленого підходу до розв'язання двовимірних задач теорії конічних оболонок проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини при різних граничних умовах і збереженні ваги. Числові результати розв'язання задач наведено у вигляді графіків і таблиць.

**SUMMARY.** On the base of developed approach to solving the two-dimensional problems of the theory of conical shells an analysis is performed of the stress-strain state of shells of a variable in two directions thickness under different boundary conditions and holding the weight. The numerical results are presented in the form of graphs and tables.

**Key words:** conical shell, variable thickness, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method.

1. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчёта оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Статика элементов конструкций. – К.: «А.С.К.», 1999. – 379 с. – (Механика композитов: в 12-ти т.; т.8.).
4. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и её приложение в машиностроении. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 287 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Физматгиз, 1966 – Т.3. – 656 с.
6. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // J. Eng. Math. – 2003. – 46. – P. 269 – 280.
8. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Orthotropic Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 6. – P. 679 – 685.
9. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of Corrugation Frequency and Amplitude on the Stress State of Hollow Elliptic Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 9. – P. 1012 – 1017.
10. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the problem of Stress State of Transversally Isotropic Hollow Cylinders with Corrugations in a Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 3. – P. 338 – 347.
11. Grigorenko Ya.M., Tsybulnik V.A. On Application of Discrete Fourier Series to Analysis of the Stress State of Cylindrical Shells of Variable Thickness at Arbitrary Restraint of Faces // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 6. – P. 655 – 664.

Ин-т механики им.С.П.Тимошенко  
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 06.07.2005