

**О ПРИМЕНЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ
К РАСЧЁТУ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ТОРЦОВ**

В конструктивных элементах современной техники и приборах находят широкое применение круговые цилиндрические оболочки постоянной и переменной толщины, подверженные воздействию неравномерно распределённых и локальных нагрузок при различных видах закрепления краёв [3, 4, 7, 12 – 15]. Если для цилиндрических оболочек постоянной толщины имеются разработанные методы расчёта их напряжённо-деформированного состояния, то для оболочек переменной толщины применяемые методы разработаны для различных упрощённых вариантов. Так, например, в некоторых методах для расчёта цилиндрических оболочек переменной толщины используются упрощённые уравнения теории оболочек Муштари – Доннели – Власова [1, 2, 6, 8, 10, 11], или рассматриваются задачи лишь при определённых граничных условиях на торцах, позволяющих разделить переменные [5].

В настоящей статье рассматривается класс задач о напряжённо-деформированном состоянии цилиндрических оболочек переменной в двух координатных направлениях толщины под действием поверхностной нагрузки на основе точных уравнений теории тонких оболочек [2, 8] при произвольных граничных условиях на торцах, решение которых основывается на применении дискретных рядов Фурье [9]. Двумерная краевая задача путём разложения всех функций в ряды Фурье по окружной координате на непрерывном и дискретном множествах точек сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [3].

1. Отнесём срединную поверхность оболочки к ортогональной системе координат s, θ – длина дуги по образующей и центральный угол в поперечном сечении. Тогда исходные соотношения запишем в следующем виде:

выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}; & \ell_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s}; \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; & \kappa_\theta &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); & \kappa_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}; \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} r \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + r q_s &= 0; & r \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial s} + Q_\theta + r q_\theta &= 0; \\ r \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta + r q_\theta &= 0; & r \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - r Q_s &= 0; & r \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

соотношения упругости

$$N_s = D_M (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = D_N (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_s); \quad S = \frac{1 - \nu}{2} D_N \varepsilon_{s\theta};$$

$$M_s = D_M(\kappa_s + \nu\kappa_\theta); \quad M_\theta = D_M(\kappa_\theta + \nu\kappa_s);$$

$$H = (1 - \nu)D_M\kappa_{s\theta} \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq \pi); \quad (3)$$

$$D_N = \frac{E \cdot h(s, \theta)}{1 - \nu^2}, \quad D_M = \frac{E \cdot h^3(s, \theta)}{12(1 - \nu^2)} \quad (4)$$

– тангенциальная и изгибная жёсткости.

В выражениях (1) – (4) u, v, w – перемещения по образующей, направляющей и нормали к срединной поверхности; $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}, \kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}$ – тангенциальные и изгибные деформации; $N_s, N_\theta, S, Q_s, Q_\theta, M_s, M_\theta, H$ – усилия и моменты; $h = h(s, \theta)$ – толщина оболочки; r – радиус кривизны поперечного сечения; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; q_s, q_θ, q_γ – компоненты нагрузки.

Выбираем в качестве разрешающих функции $\hat{Q}_s, N_s, \hat{S}, M_s, w, u, v, \vartheta_s$, где

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}; \quad \hat{S} = S + \frac{2}{r} H; \quad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}. \quad (5)$$

Полагая $q_s = q_\theta = 0$, после некоторых преобразований из (1) – (4) получаем систему разрешающих уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial s} &= \frac{\nu}{r} N_s - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \frac{1 - \nu^2}{r^2} D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1 - \nu^2}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1 - \nu^2}{r^2} D_N w + \frac{1 - \nu^2}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(D_M \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - q_r; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) + \frac{2(1 - \nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) - \frac{2(1 - \nu)}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} - \frac{1 - \nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\ &- \frac{1 - \nu^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{1 - \nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_N w) + \frac{1 - \nu^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_M \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \hat{Q}_s - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) - \frac{2(1 - \nu)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) + \frac{2(1 - \nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta_s; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{D_N} N_s - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} w; \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{1 - \nu} \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{D_M}{p_0 D_N} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{4}{r^2} \frac{D_M}{p_0 D_N} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$p_0 = 1 + \frac{4}{r^2} \frac{D_M}{D_N} = 1 + \frac{4h^2}{12r^2}. \quad (7)$$

На торцах оболочки $s = 0$ и $s = L$ задаются граничные условия для разрешающих функций.

В связи с тем, что жёсткости D_N и D_M зависят от переменной θ , разделить переменные с помощью рядов Фурье в окружном направлении не представляется возможным. Поэтому введём следующие дополнительные функции, включающие в себя члены, препятствующие разделению переменных по направляющей:

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= D_M \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \quad (j = 1, 2); \quad \varphi_2^j = D_N \left\{ w, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \quad (j = 1, 2); \\ \varphi_3^j &= \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \hat{S}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\} \quad (j = 1, 2, 3); \quad \varphi_4^j = \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\} \quad (j = 1, 2); \quad (8) \\ \varphi_5 &= \frac{1}{D_N} N_s; \quad \varphi_6 = \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S}; \quad \varphi_7 = \frac{1}{D_M} M_s. \end{aligned}$$

С учётом (8) разрешающую систему (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial s} &= \frac{\nu}{r} N_s - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \varphi_2^2 - \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \varphi_2^1 + \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial^2 \varphi_1^2}{\partial \theta^2} - r_r; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial \theta} + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \varphi_4^2}{\partial \theta} - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial \varphi_4^1}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial \varphi_2^2}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial \varphi_2^1}{\partial \theta} + \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \hat{Q}_s - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial \theta} - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial \varphi_4^2}{\partial \theta} + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \varphi_4^1}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\vartheta_s; \quad (9) \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \varphi_5 - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} w; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{2}{1-\nu} \varphi_6 - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \varphi_3^2 - \frac{4}{r^2} \varphi_3^3; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \varphi_7 + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Представим все функции, входящие в систему уравнений (9), в виде разложений в ряды Фурье по координате θ

$$X(s, \theta) = \sum_{n=0}^N X_n(s) \cos \lambda_n \theta; \quad Y(s, \theta) = \sum_{n=1}^N Y_n(s) \sin \lambda_n \theta; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2}; \quad (10)$$

$$X = \{\hat{Q}_s, N_s, M_s, w, u, \vartheta_s, \varphi_1^j, \varphi_2^j, \varphi_5, \varphi_7, q_\gamma\}; \quad Y = \{\hat{S}, v, \varphi_3^j, \varphi_4^j, \varphi_6\}.$$

После подстановки разложений (10) в уравнения (9) и граничные условия, разделяя переменные, приходим к краевой задаче для системы обыкновенных дифферен-

циальных уравнений с соответствующими граничными условиями относительно амплитудных значений функций, входящих в систему (9). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{Q}_{s,n}}{ds} &= \frac{v}{r} N_{s,n} + \frac{v\lambda_n^2}{r^2} M_{s,n} + \frac{1-v^2}{r^2} \varphi_{2,n}^2 - \\
&- \frac{(1-v^2)\lambda_n^2}{r^4} \varphi_{1,2}^1 + \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^2} \varphi_{2,n}^1 - \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^4} \varphi_{1,n}^2; \\
\frac{dN_{s,n}}{ds} &= -\frac{\lambda_n}{r} \hat{S}_n + \frac{4\lambda_n}{r^3} \varphi_{3,n}^1 + \frac{2(1-v)\lambda_n}{r^3} \varphi_{4,n}^2 - \frac{2(1-v)\lambda_n}{r^4} \varphi_{4,n}^1; \\
\frac{d\hat{S}_n}{ds} &= \frac{v\lambda_n}{r} N_{s,n} + \frac{v\lambda_n}{r^2} M_{s,n} + \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^2} \varphi_{2,n}^2 + \\
&+ \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^4} \varphi_{1,n}^1 + \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^2} \varphi_{2,n}^1 - \frac{(1-v^2)\lambda_n}{r^4} \varphi_{1,n}^2; \\
\frac{dM_{s,n}}{ds} &= \hat{Q}_{s,n} - \frac{4\lambda_n}{r^2} \varphi_{3,n}^1 - \frac{2(1-v)\lambda_n}{r^2} \varphi_{4,n}^2 + \frac{2(1-v)\lambda_n}{r^3} \varphi_{4,n}^1; \\
\frac{dw_n}{ds} &= -\vartheta_{s,n}; \quad \frac{du_n}{ds} = \varphi_{5,n} - \frac{v\lambda_n}{r} v_n - \frac{v}{r} w_n; \\
\frac{dv_n}{ds} &= \frac{2}{1-v} \varphi_{6,n} + \frac{\lambda_n}{r} u_n + \frac{4}{r^3} \varphi_{3,n}^2 - \frac{4}{r^2} \varphi_{3,n}^3; \\
\frac{d\vartheta_{s,n}}{ds} &= \varphi_{7,n} - \frac{v\lambda_n^2}{r^2} w_n - \frac{v\lambda_n}{r^2} v_n \quad (n = \overline{0, N}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Граничные условия можно представить в следующем виде:

$$B_1 \bar{Z}(0) = \bar{b}_1; \quad B_2 \bar{Z}(L) = \bar{b}_2, \tag{12}$$

где $\bar{Z}(s) = \{\hat{Q}_{s,n}, N_{s,n}, \hat{S}_n, M_{s,n}, w_n, u_n, v_n, \vartheta_{s,n}\}^T$ – вектор-столбец разрешающих функций; B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы; \bar{b}_1 и \bar{b}_2 – векторы.

Рассматриваемую краевую задачу (11), (12) будем решать численным методом дискретной ортогонализации на интервале $0 \leq s \leq L$. С учётом (8) для каждого n в уравнениях (11) имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}^j &= \varphi_{1,n}^j(s; w; v) \quad (j = 1, 2); \quad \varphi_{2,n}^j = \varphi_{2,n}^j(s; w; v) \quad (j = 1, 2); \\
\varphi_{3,n}^j &= \varphi_{3,n}^j(s; \hat{S}; u; \vartheta_s) \quad (j = 1, 2, 3); \quad \varphi_{4,n}^j = \varphi_{4,n}^j(s; u; \vartheta_s) \quad (j = 1, 2); \\
\varphi_{5,n}^j &= \varphi_{5,n}^j(s; N_s); \quad \varphi_{6,n}^j = \varphi_{6,n}^j(s; \hat{S}); \quad \varphi_{7,n}^j = \varphi_{7,n}^j(s; M_s) \quad (n = \overline{0, N}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Входящие в коэффициенты рядов Фурье (10) φ_{in}^j не выражаются явно через коэффициенты рядов Фурье разрешающих функций, а вычисляются при интегрирова-

нии системы (11) с использованием дискретных рядов Фурье на каждом шаге $s = \text{const}$. Соотношения (13) показывают зависимость этих коэффициентов от амплитудных значений определённых разрешающих функций и связность всех уравнений системы (11).

2. Уравнения системы (11) интегрируются одновременно для всех гармоник с помощью указанного метода дискретной ортогонализации. Для определения в процессе интегрирования амплитудных значений функций (13) по текущим значениям разрешающих функций для фиксированного значения $s = s_k$ ($k = 0, K$) вычисляем в ряде точек θ_r ($r = 0, R$) интервала $0 \leq \theta \leq \pi$ значения функций (13) и строим ряд Фурье для дискретно заданной функции, который будем называть дискретным рядом Фурье. С увеличением числа точек θ_r , в которых вычисляются значения дополнительных функций, дискретный ряд Фурье всё меньше отличается от точного ряда Фурье. В начале интегрирования учитываются граничные условия на этом крае. Найденные амплитудные значения функций (13) подставляются в систему (11) и продолжается интегрирование по s . При этом применяется метод Рунге – Кутты с ортогонализацией в отдельных точках интервала $0 \leq s \leq L$ [3]. Таким образом, используя текущие значения амплитуд разрешающих функций, при фиксированном значении координаты $s = s_k$ ($0 \leq s \leq L$) вычисляем в точках θ_r ($1 \leq r \leq R$) следующие величины:

$$D_M^r, D_N^r, \frac{D_M^r}{p_0^r D_N^r}, \frac{D_M^r}{p_0^r}, \frac{1}{D_N^r}, \frac{1}{p_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_M^r}.$$

Используя числовые значения этих величин и выражения дополнительных функций (8), по вычисленным значениям амплитуд разрешающих функций получаем

$$\varphi_1^1(s_k, \theta_r) = D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=0}^N v_n(s_k) \lambda_n \cos \lambda_n \theta_r;$$

$$\varphi_1^2(s_k, \theta_r) = -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N w_n(s_k) \lambda_n^2 \sin \lambda_n \theta_r \quad (1 \leq r \leq R). \quad (14)$$

Аналогично вычисляются значения дополнительных функций $\varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_4^j, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ в точках θ_r ($1 \leq r \leq R$).

На основе полученных значений дополнительных функций строим дискретные ряды Фурье, представленные в виде, аналогичном (10), коэффициенты которых являются недостающими амплитудными значениями дополнительных функций (13) при $s = s_k$ для системы (11). Используя при этом стандартную процедуру определения коэффициентов Фурье для таблично заданной функции, находим их числовые значения [9]. Полученные значения коэффициентов Фурье (13) дополнительных функций подставляем в систему (11) и продолжаем интегрирование по s , переходя от точки s_k к точке s_{k+1} .

Для решения краевой задачи (11), (12) применяем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации. В начале и конце интегрирования удовлетворяем граничным условиям.

Отметим, что с увеличением числа точек R , в которых вычисляются дополнительные функции, дискретный ряд Фурье все меньше отличается от ряда Фурье непрерывно заданной функции. На практике приходится пользоваться лишь немногими первыми членами тригонометрического разложения, так как коэффициенты Фурье в большинстве случаев быстро убывают, а с ними быстро падает и влияние далёких гармоник. Известно, что в вопросе о точности приближений при вычислении рядов Фурье важную роль играет быстрота убывания коэффициентов Фурье, которая в свою очередь связана с дифференциальными свойствами функции, продолженной на весь

интервал $(-\infty, \infty)$. Наряду с этим имеются приближённые подходы, которые позволяют сравнить значение коэффициента дискретного ряда Фурье, построенного на конечном множестве точек, с точными значениями этого же и других коэффициентов ряда Фурье для той же функции, заданной аналитически. Так, в книге [9] показано, что, в частности, если число членов дискретного ряда Фурье $R = 12$, то следует учитывать лишь 2 – 3 члена ряда. Если же $R = 24$, то можно ожидать приемлемую точность при 7 – 8 членах ряда.

3. Приведём результаты решения некоторых задач на основе данного подхода.

С целью иллюстрации сходимости решения задачи к точному рассмотрим цилиндрическую оболочку переменной в окружном направлении толщины, изменяющейся по закону

$$h = H(1 + \beta \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (15)$$

под действием нагрузки $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / L)$ при шарнирном опирании торцов, т.е. при таких граничных условиях:

$$N_s = M_s = w = v = 0 \quad \text{при } s = 0, s = L. \quad (16)$$

Граничные условия (16) на торцах оболочки позволяют получить решение задачи на основании двух подходов:

- 1) с помощью данного подхода на основе дискретных рядов Фурье;
- 2) путём разделения переменных в продольном направлении и решения одномерной задачи методом дискретной ортогонализации.

Второй из указанных подходов можно принять за точный.

Таблица 1

Метод	R	N	$WE / 10^3 q_0$				$N_\theta / 10 q_0$			
			$\theta / \pi = 0$		$\theta / \pi = 1$		$\theta / \pi = 0$		$\theta / \pi = 1$	
			$s/L=0,1$	$s/L=0,5$	$s/L=0,1$	$s/L=0,5$	$s/L=0,1$	$s/L=0,5$	$s/L=0,1$	$s/L=0,5$
$H = 0,25$										
1	12	3	0,654	2,117	1,887	6,108	0,794	2,569	0,794	2,571
	16	5	0,770	2,492	2,098	6,788	0,963	3,115	0,891	2,884
	24	8	0,745	2,411	2,146	6,945	0,917	2,968	0,917	2,969
	36	12	0,749	2,424	2,157	6,982	0,926	2,997	0,926	2,998
2	-	-	0,748	2,421	2,157	6,981	0,926	2,996	0,927	3,000
$H = 0,5$										
1	12	3	0,326	1,055	0,943	3,053	0,791	2,561	0,794	2,570
	16	5	0,385	1,245	1,049	3,393	0,962	3,112	0,891	2,884
	24	8	0,374	1,211	1,073	3,472	0,917	2,966	0,917	2,969
	36	12	0,372	1,206	1,079	3,491	0,925	2,995	0,926	2,997
2	-	-	0,372	1,205	1,078	3,490	0,922	2,984	0,926	2,998

Решение задачи выполнено при следующих исходных данных: $R = 30$; $L = 30$; $H = 0,25$; $0,50$; $\beta = 0,5$; $\nu = 0,3$. Результаты решения задачи для прогиба w и усилия N_θ при некоторых значениях s и θ приведены в табл.1, в которой R – число членов дискретного ряда Фурье, N – число учитываемых членов ряда. Из таблицы видно, как с увеличением R и N решение задачи для w и N_θ , полученное с применением рядов Фурье, сходится к точному. Уже при $R = 36$, $N = 12$ наблюдается совпадение результатов в третьей-четвёртой значащей цифре, т.е. до нескольких сотых процента, что свидетельствует о достаточной точности полученного на основе данного подхода решения задачи.

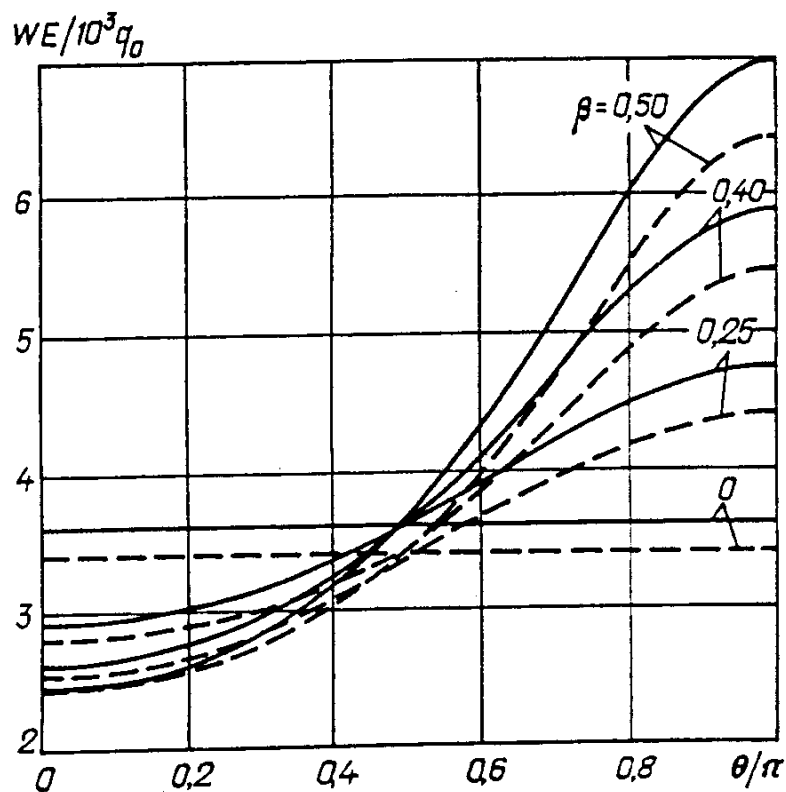


Рис. 1

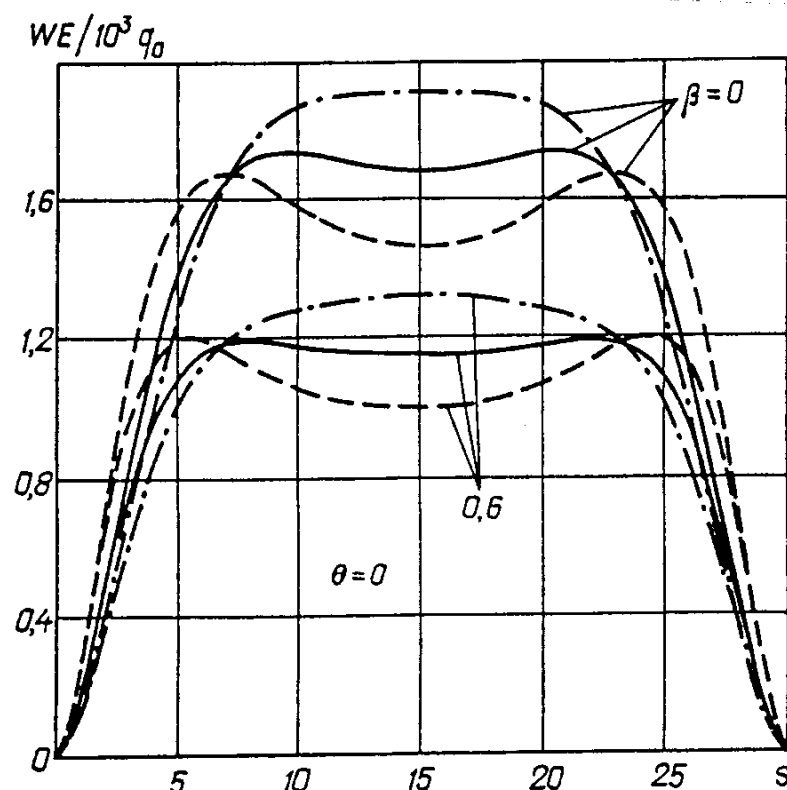


Рис. 2

На рис.1 в виде графиков показаны результаты решения задачи для цилиндрической оболочки переменной толщины (15) для двух вариантов закрепления торцов – жёсткое закрепление (пунктирная линия) и шарнирное опирание (сплошная линия). Граничные условия при жёстком закреплении имеют вид

$$u = v = w = \vartheta_s = 0$$

$$\text{при } s = 0, s = L. \quad (17)$$

Задача решена при таких исходных данных: $R = 30$; $L = 30$; $H = 0,25$; $q = q_0 \sin(\pi s / L)$; $\beta = 0; 0,25; 0,40; 0,50$; $s = L/2$; $\nu = 0,3$.

Приведенные на рис.1 графики показывают, какое влияние оказывают различные граничные условия на торцах на прогиб оболочки в сечении $s = L/2$ при изменении толщины и сохранении веса.

На рис. 2, 3 приведены результаты решения задачи для цилиндрической оболочки переменной в двух координатных направлениях толщины, изменяющейся по закону

$$h(s, \theta) = \frac{H}{1 - \alpha/3} \left[1 - \alpha \left(\frac{2s}{L} - 1 \right)^2 (1 + \beta \cos \theta) \right] \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (18)$$

При любых значениях α и β вес оболочки сохраняется и равен весу оболочки постоянной толщины $H = \text{const}$ ($\alpha = \beta = 0$).

Задача решена при таких данных: $R = 30$; $L = 30$; $H = 0,5$; $q_r = q_0 = \text{const}$; $\nu = 0,3$. Торцы оболочки жёстко закреплены. Значения β указаны на рисунках. Там же представлены графики распределения прогибов w по длине оболочки в интервале $0 \leq s \leq L$ для $\theta = 0$ (рис. 2) и $\theta = \pi$ (рис. 3). Для оболочек при $\alpha = 0$ графики обозначены сплошной линией, при $\alpha = 0,4$ – штриховой, а при $\alpha = -0,4$ – штрих-пунктирной. Из приведенных на рисунках графиков видно как влияет изменение толщины на деформирование оболочки и как путем выбора параметров α и β при сохранении веса оболочки можно получить требуемое распределение и величину прогибов.

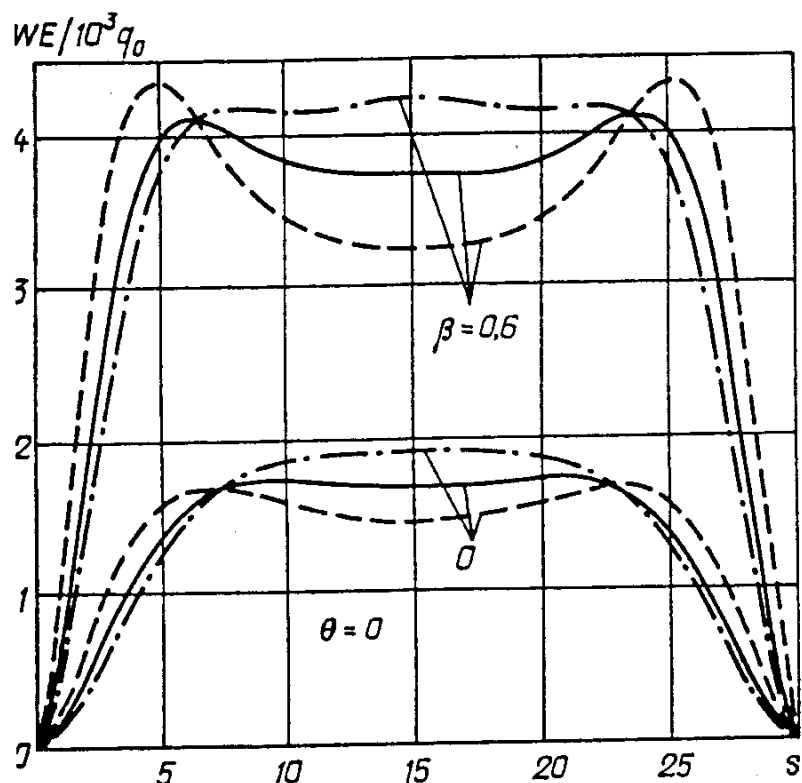


Рис. 3

Таблица 2

β	θ / π	$W E / 10^3 q_0$				
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = -0,2$	$\alpha = -0,4$
0	0 - 1,0	3,310	3,091	2,872	3,529	3,748
0,2	0	2,848	2,660	2,470	3,037	3,225
	0,2	2,925	2,732	2,537	3,119	3,312
	0,4	3,153	2,944	2,735	3,362	3,570
	0,6	3,501	3,269	3,038	3,733	3,964
	0,8	3,859	3,604	3,350	4,115	4,370
	1,0	4,020	3,755	3,490	4,286	4,552
0,4	0	2,531	2,364	2,195	2,699	2,866
	0,2	2,650	2,474	2,298	2,826	3,000
	0,4	3,029	2,828	2,627	3,229	3,429
	0,6	3,730	3,484	3,237	3,978	4,224
	0,8	4,681	4,373	4,065	4,991	5,300
	1,0	5,214	4,871	4,529	5,559	5,903
0,6	0	2,307	2,153	1,999	2,460	2,613
	0,2	2,459	2,296	2,132	2,622	2,785
	0,4	2,940	2,745	2,550	3,135	3,328
	0,6	4,011	3,745	3,480	4,276	4,541
	0,8	6,021	5,624	5,228	6,419	6,817
	1,0	7,551	7,054	6,557	8,050	8,548

Таблица 3

β	θ / π	$N_{\theta} / 10 q_0$				
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = -0,2$	$\alpha = -0,4$
0	0 - 1,0	2,993	2,993	2,992	3,026	3,024
0,2	0	3,040	3,039	3,038	3,080	3,076
	0,2	3,031	3,031	3,029	3,072	3,068
	0,4	3,009	3,008	3,007	3,046	3,043
	0,6	2,981	2,980	2,980	3,007	3,006
	0,8	2,960	2,959	2,960	2,968	2,969
	1,0	2,952	2,952	2,952	2,951	2,953
0,4	0	3,089	3,088	3,087	3,112	3,107
	0,2	3,074	3,073	3,072	3,101	3,096
	0,4	3,028	3,027	3,026	3,064	3,060
	0,6	2,969	2,969	2,968	2,992	2,991
	0,8	2,927	2,927	2,928	2,909	2,911
	1,0	2,912	2,912	2,913	2,874	2,877
0,6	0	3,129	3,128	3,127	3,134	3,133
	0,2	3,121	3,120	3,119	3,121	3,118
	0,4	3,050	3,050	3,049	3,081	3,076
	0,6	2,955	2,955	2,954	2,987	2,985
	0,8	2,890	2,891	2,892	2,863	2,864
	1,0	2,852	2,852	2,853	2,822	2,824

Таблица 4

β	θ / π	$W E / 10^3 q_0$				
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = -0,2$	$\alpha = -0,4$
0	0 – 1,0	1,684	1,572	1,458	1,795	1,905
0,2	0	1,453	1,358	1,261	1,548	1,641
	0,2	1,493	1,395	1,295	1,590	1,686
	0,4	1,607	1,500	1,393	1,712	1,816
	0,6	1,776	1,658	1,537	1,894	2,010
	0,8	1,945	1,814	1,681	2,075	2,203
	1,0	2,019	1,883	1,745	2,154	2,288
0,4	0	1,283	1,199	1,114	1,366	1,448
	0,2	1,345	1,257	1,168	1,432	1,518
	0,4	1,542	1,441	1,339	1,642	1,742
	0,6	1,890	1,764	1,637	2,015	2,139
	0,8	2,334	2,177	2,018	2,491	2,647
	1,0	2,580	2,405	2,230	2,754	2,928
0,6	0	1,160	1,083	1,005	1,236	1,313
	0,2	1,234	1,153	1,071	1,315	1,395
	0,4	1,493	1,396	1,299	1,590	1,686
	0,6	2,038	1,904	1,768	2,171	2,304
	0,8	2,990	2,790	2,590	3,190	3,390
	1,0	3,748	3,498	3,251	3,998	4,250

Таблица 5

β	θ / π	$N_{\theta} / 10 q_0$				
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = -0,2$	$\alpha = -0,4$
0	0 – 1,0	3,027	3,025	3,018	3,026	3,024
0,2	0	3,084	3,085	3,082	3,080	3,076
	0,2	3,075	3,076	3,072	3,072	3,068
	0,4	3,048	3,047	3,043	3,046	3,043
	0,6	3,006	3,004	2,997	3,007	3,006
	0,8	2,966	2,962	2,954	2,968	2,969
	1,0	2,949	2,944	2,936	2,951	2,953
0,4	0	3,116	3,118	3,118	3,112	3,107
	0,2	3,105	3,107	3,107	3,101	3,096
	0,4	3,067	3,068	3,066	3,064	3,060
	0,6	2,992	2,990	2,985	2,992	2,991
	0,8	2,906	2,901	2,894	2,909	2,911
	1,0	2,870	2,865	2,858	2,874	2,877
0,6	0	3,134	3,133	3,131	3,134	3,133
	0,2	3,123	3,124	3,124	3,121	3,118
	0,4	3,085	3,088	3,090	3,081	3,076
	0,6	2,988	2,988	2,986	2,987	2,985
	0,8	2,860	2,858	2,855	2,863	2,864
	1,0	2,820	2,818	2,818	2,822	2,824

Распределение прогибов по направляющей в среднем сечении оболочки $s=L/2$ дано в табл. 2 при $H = 0,25$ и табл. 4 при $H = 0,5$ в зависимости от изменения параметров α и β при сохранении веса. Из приведенных в табл. 2 данных видно как изменяется прогиб оболочки в зависимости от её толщины. В частности, при $\alpha = 0$ для $\beta = 0,2$ прогиб в более толстой части оболочки при $\theta = 0$ меньше, чем в оболочке по-

стоянної товщини ($\beta = 0$), в 1,16 раза, а в більш тонкій її частині при $\theta = \pi$ більше, ніж в оболонці постійної товщини, в 1,21 раза. Для $\beta = 0,4$ маємо: при $\theta = 0 - 1,31$, при $\theta = \pi - 1,57$, а для $\beta = 0,6$ отримуємо: при $\theta = 0 - 1,43$, при $\theta = \pi - 2,28$. С збільшенням α прогиб в середній частині оболонки для $\beta = 0,2$ при $\theta = 0$ зменшується, а при $\theta = \pi$ зростає, і з зменшенням α прогиб при $\theta = 0$ збільшується, а при $\theta = \pi$ зменшується. Така ж картина спостерігається і для $\beta = 0,4$ і $\beta = 0,6$, т.е. при фіксованому β з зміною α прогиб в середній частині оболонки може збільшуватися або зменшуватися при збереженні ваги.

В табл. 3 наведені значення зусилля N_θ для $H=0,25$, а в табл. 5 – для $H=0,5$. Як видно з табл. 3 і 5, величина N_θ з зміною α і β змінюється незначально. З табл. 4 і 5 видно, що якісна картина аналогічна результатам, представленим в табл. 2 і 3, але при цьому величина прогибу зменшується майже вдвічі, а величина зусилля N_θ незначально відрізняється від значень, наведених в табл. 3.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано підхід до розв'язання класу крайових задач про напружено – деформований стан циліндричних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини. Підхід базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є для відокремлення змінних в коловому напрямку, що дозволяє звести задачу до одновимірної, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено числові приклади.

S U M M A R Y . An approach to solving the class of boundary problems on stress-strain state of cylindrical shells of variable in two coordinate directions thickness is presented. The approach is based on application of discrete Fourier series for separation of variables in the peripheral direction. This allows to reduce the problem to the one-dimensional one, which is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The examples are given.

Key words: cylindrical shell, variable thickness, discrete Fourier series, method of discrete orthogonalization.

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 748с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
3. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости. – К.: Наук.думка, 1973. – 228 с.
4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. – К.:Наук.думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчёта оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Е.И. и др. Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук.думка, 1975. – 183 с.
6. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
7. Колкунов Н.В. Основы расчёта упругих оболочек: Учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Высш.шк., 1987. – 324 с.
8. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Физматгиз, 1966. – Т.3. – 656 с.
10. Grigorenko Ya.M., Zakhariyenko L.I. Solution of the Problem of the Stress State of Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 1999. – 34, N 12. – P. 1196 – 1203.
11. Grigorenko Ya.M., Zakhariyenko L.I. Studying the Effect of the Spatial Frequency and Amplitude of Corrugation on the Stress – Strain State of Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 12. – P. 1429 – 1433.
12. Piskunov V.G., Raşkasov A.O. Development of the theory of layered plates and shells // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N2. – P. 135 – 166.
13. Semenyuk N.D. Stability of Axially Compressed Noncircular Cylindrical Shells Consisting of Panels of Constant Curvature // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 6. – P. 726 – 736.
14. Vasilenko A.T., Sudavtsova G.K. Analysis of Stresses and Displacement in Orthotropic Noncircular Shells Under Centrifugal Loads // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 1. – P. 91 – 96.
15. Soldatos K.P. Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross – Section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237 – 274.