

УДК 539.3

©2005

Я.М. Григоренко, В.А. Цыбульник

### К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СТАТИКИ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ ТОЛЩИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

**Введение.** Развитие теории и разработка методов расчёта конических оболочек является одной из актуальных задач современного машиностроения. Конические оболочки постоянной и переменной толщины находят широкое применение в качестве конструктивных элементов в турбостроении, авиадвигателестроении, ракетостроении и других областях техники. Многие результаты исследований в этом направлении, выполненных под научным руководством академика НАН Украины А.Д.Коваленко, нашли отображение в многочисленных публикациях, в том числе в монографиях [7 – 10, 18]. В настоящее время работы в указанном направлении проводятся с привлечением численных методов с использованием современных компьютеров [4, 16, 17, 19]. В частности, одному подходу к расчёту напряжённого состояния конических оболочек переменной толщины и посвящена эта статья.

В настоящей статье рассматривается класс задач о напряжённо-деформированном состоянии конических оболочек переменной в окружном направлении толщины под действием поверхностной нагрузки на основе точных уравнений теории тонких оболочек [1, 2, 6, 11] при произвольных граничных условиях на торцах, решение которых основывается на применении дискретных рядов Фурье [12]. Двумерная краевая задача путём разложения всех функций в ряды Фурье по окружной координате на непрерывном и дискретном множествах точек сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [3].

1. Отнесём срединную поверхность оболочки к ортогональной системе координат  $s, \theta$  – длина дуги по образующей и центральный угол в поперечном сечении. При этом радиус окружности в поперечном сечении оболочки  $r(s) = r_0 + \cos \varphi \cdot s$ , где  $r_0$  – радиус окружности в плоскости отсчёта;  $\varphi$  – угол между нормалью к поверхности оболочки и осью  $z$ .

Тогда исходные соотношения запишем в следующем виде:  
выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \quad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v; \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \kappa_\theta = \frac{v \sin \varphi}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \kappa_{s\theta} &= \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_s)}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \theta} - \cos \varphi \cdot N_\theta + r q_s &= 0; \\ \frac{\partial(rS)}{\partial s} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi \cdot S + \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial s} + \sin \varphi Q_\theta + r q_\theta &= 0; \\ \frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi \cdot N_\theta + r q_\gamma &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(rM_s)}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - \cos \varphi \cdot M_\theta - rQ_s = 0;$$

$$\frac{\partial(rH)}{\partial s} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi \cdot H - rQ_\theta = 0;$$

соотношения упругости

$$N_s = D_N (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = D_N (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_s), \quad S = \frac{1-\nu}{2} D_N \varepsilon_{s\theta};$$

$$M_s = D_M (\kappa_s + \nu \kappa_\theta), \quad M_\theta = D_M (\kappa_\theta + \nu \kappa_s), \quad H = (1-\nu) D_M \kappa_{s\theta}; \quad (3)$$

$$(0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

$$D_N = \frac{Eh(s, \theta)}{1-\nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3(s, \theta)}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

– тангенциальная и изгибная жёсткости.

В выражениях (1) – (4)  $u, v, w$  – перемещения по образующей, направляющей и нормали к срединной поверхности;  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}, \kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}$  – тангенциальные и изгибные деформации;  $N_s, N_\theta, S, Q_s, Q_\theta, M_s, M_\theta, H$  – усилия и моменты;  $h = h(s, \theta)$  – толщина оболочки;  $r$  – радиус кривизны поперечного сечения;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $q_s, q_\theta, q_\gamma$  – компоненты нагрузки.

Вместо  $q_s$  и  $q_\gamma$  рассматриваем следующие выражения:

$$q_r = q_s \cos \varphi + q_\gamma \sin \varphi, \quad q_z = q_s \sin \varphi - q_\gamma \cos \varphi \quad (5)$$

и выбираем в качестве разрешающих функций  $N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s$ , где

$$N_r = N_s \cos \varphi + \hat{Q}_s \sin \varphi, \quad N_z = N_s \sin \varphi - \hat{Q}_s \cos \varphi;$$

$$u_r = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi. \quad (6)$$

Запишем приведенные меридианальные, тангенциальные усилия и угол поворота

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \hat{S} = S + \frac{2 \sin \varphi}{r} H, \quad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}. \quad (7)$$

После некоторых преобразований получаем систему разрешающих уравнений в виде

$$\frac{\partial N_r}{\partial s} = -\frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} N_r + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_z - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2) D_N}{r^2} u_r - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D_M \vartheta_s) - q_r;$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial s} = -\frac{\cos \varphi}{r} N_z - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) +$$

$$+ \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D_M \vartheta_s) + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) - q_z; \\
\frac{\partial \hat{S}}{\partial s} = & - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \frac{\partial N_z}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \varphi}{r} \hat{S} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) - \\
& - \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_N u_r) - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\
& - \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_M \vartheta_s) - q_\theta; \quad (8) \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} = & \sin \varphi N_r - \cos \varphi N_z - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) - \frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} M_s - \\
& - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) + \\
& + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\
& - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^2} (D_M \vartheta_s); \\
\frac{\partial u_r}{\partial s} = & \frac{\cos^2 \varphi}{D_N} N_r + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{D_N} N_z - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \vartheta_s; \\
\frac{\partial u_z}{\partial s} = & \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{D_N} N_r + \frac{\sin^2 \varphi}{D_N} N_z - \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \varphi \vartheta_s; \\
\frac{\partial v}{\partial s} = & \frac{2}{(1-\nu) p_0 D_N} \hat{S} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{4 D_M}{r^2 p_0 D_N} - 1 \right) \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} v - \frac{4 \sin \varphi D_M}{r^2 p_0 D_N} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta}; \\
\frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} = & \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s,
\end{aligned}$$

где  $p_0 = 1 + \frac{4 \sin^2 \varphi D_M}{r^2 D_N}$ .

На торцах оболочки  $s = 0$  и  $s = L$  задаются граничные условия для разрешающих функций.

В связи с тем, что жёсткости  $D_N$  и  $D_M$  зависят от переменной  $\theta$ , разделить переменные с помощью рядов Фурье в окружном направлении не представляется возможным. Поэтому введём следующие дополнительные функции, включающие в себя члены, препятствующие разделению переменных по направляющей [5, 13 – 15]:

$$\begin{aligned}
\psi_1^j = D_M \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \vartheta_s \right\} \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad \psi_2^j = D_N \left\{ u_r, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \quad (j = 1, 2); \\
\psi_3^j = \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\} \quad (j = 1, 2); \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\psi_4^j = \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \hat{S}, \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\} \quad (j=1,2,3); \quad \psi_5^j = \frac{1}{D_N} \{N_r, N_z\} \quad (j=1,2);$$

$$\psi_6 = \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S}, \quad \psi_7 = \frac{1}{D_M} M_s.$$

С учётом (9) разрешающую систему (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial s} &= -\frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} N_r + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_z - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_2^1 - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^2}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_2^2 - \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^3}{\partial \theta^2} - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1^4}{\partial \theta^2} - q_r; \\ \frac{\partial N_z}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} N_z - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \frac{\partial \psi_4^1}{\partial \theta} + \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} - \\ &- \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^2}{\partial \theta^2} - \\ &- \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_1^3}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1^4}{\partial \theta^2} + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \psi_3^2}{\partial \theta} - q_z; \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu \cos \varphi}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \frac{\partial N_z}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \varphi}{r} \hat{S} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^1}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial \psi_2^1}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^2}{\partial \theta} - \\ &- \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial \psi_2^2}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2) \sin^2 \varphi}{r^4} \frac{\partial \psi_1^3}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \frac{\partial \psi_1^4}{\partial \theta} - q_\theta; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \sin \varphi N_r - \cos \varphi N_z - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \psi_4^1}{\partial \theta} - \frac{(1-\nu) \cos \varphi}{r} M_s - \\ &- \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_1^1 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^3} \psi_1^2 + \frac{(1-\nu^2) \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \psi_1^3 - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial \psi_3^2}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu^2) \cos^2 \varphi}{r^2} \psi_1^4; \\ \frac{\partial u_r}{\partial s} &= \cos^2 \varphi \cdot \psi_5^1 + \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_5^2 - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \vartheta_s; \\ \frac{\partial u_z}{\partial s} &= \sin \varphi \cos \varphi \cdot \psi_5^1 + \sin^2 \varphi \cdot \psi_5^2 - \frac{\nu \sin \varphi}{r} u_r - \frac{\nu \sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \varphi \vartheta_s; \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{1-\nu} \psi_6 - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{4 \sin \varphi}{r^3} \psi_4^2 - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} v - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \psi_4^3; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \psi_7 + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s. \end{aligned} \quad (10)$$

Представим все функции, входящие в систему уравнений (10), в виде разложений в ряды Фурье по координате  $\theta$

$$X(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(s) \cos \lambda_n \theta; \quad Y(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(s) \sin \lambda_n \theta; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2}; \quad (11)$$

$$X = \{N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta_s, \psi_1^j, \psi_2^j, \psi_5^j, \psi_7, q_r, q_z\}; \quad Y = \{\hat{S}, v, \psi_3^j, \psi_4^j, \psi_6, q_\theta\}.$$

После подстановки разложений (11) в уравнения (10) и граничные условия, разделяя переменные, приходим к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями относительно амплитудных значений функций, входящих в систему (10). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dN_r^n}{ds} &= -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}N_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r}N_z^n - \frac{\cos\varphi}{r}\lambda_n\hat{S}^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\lambda_n^2M_s^n - \\
&\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^1 + \frac{1-\nu^2}{r^2}\psi_{2,n}^1 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^2 + \frac{1-\nu^2}{r^2}\psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^3 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\lambda_n^2\psi_{1,n}^4 - q_r; \\
\frac{dN_z^n}{ds} &= -\frac{\cos\varphi}{r}N_z^n - \frac{\sin\varphi}{r}\lambda_n\hat{S}^n + \frac{4\sin\varphi}{r^3}\lambda_n\psi_{4,n}^1 - \frac{\nu\cos\varphi}{r^2}\lambda_n^2M_s^n + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^1 - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^2 - \\
&\quad - \frac{2(1-\nu)}{r^4}\lambda_n\psi_{3,n}^1 - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\lambda_n^2\psi_{1,n}^3 - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\lambda_n^2\psi_{1,n}^4 + \frac{2(1-\nu)}{r^3}\lambda_n\psi_{3,n}^2 - q_z; \\
\frac{d\hat{S}^n}{ds} &= \frac{\nu\cos\varphi}{r}\lambda_nN_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r}\lambda_nN_z^n - \frac{2\cos\varphi}{r}\hat{S}^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\lambda_nM_s^n - \\
&\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\lambda_n\psi_{1,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)}{r^2}\lambda_n\psi_{2,n}^1 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\lambda_n\psi_{1,n}^2 + \frac{1-\nu^2}{r^2}\lambda_n\psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\lambda_n\psi_{1,n}^3 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\lambda_n\psi_{1,n}^4 - q_\theta; \tag{12} \\
\frac{dM_s^n}{ds} &= \sin\varphi N_r^n - \cos\varphi N_z^n - \frac{4\sin\varphi}{r^2}\lambda_n\psi_{4,n}^1 - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}M_s^n - \\
&\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\psi_{1,n}^1 + \frac{2(1-\nu)}{r^3}\lambda_n\psi_{3,n}^1 + \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\psi_{1,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\psi_{1,n}^3 - \frac{2(1-\nu)}{r^2}\lambda_n\psi_{3,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^2}\psi_{1,n}^4; \\
\frac{du_r^n}{ds} &= \cos^2\varphi\cdot\psi_{5,n}^1 + \sin\varphi\cos\varphi\cdot\psi_{5,n}^2 - \frac{\nu\cos\varphi}{r}u_r^n - \frac{\nu\cos\varphi}{r}\lambda_nv^n - \sin\varphi\vartheta_s^n; \\
\frac{du_z^n}{ds} &= \sin\varphi\cos\varphi\cdot\psi_{5,n}^1 + \sin^2\varphi\cdot\psi_{5,n}^2 - \frac{\nu\sin\varphi}{r}u_r^n - \frac{\nu\sin\varphi}{r}\lambda_nv^n + \cos\varphi\vartheta_s^n; \\
\frac{dv^n}{ds} &= \frac{2}{1-\nu}\psi_{6,n} + \frac{\cos\varphi}{r}\lambda_nu_r^n + \frac{4\sin\varphi}{r^3}\psi_{4,n}^2 + \frac{\sin\varphi}{r}\lambda_nu_z^n + \frac{\cos\varphi}{r}v^n - \frac{4\sin\varphi}{r^2}\psi_{4,n}^3; \\
\frac{d\vartheta_s^n}{ds} &= \psi_{7,n} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\lambda_n^2u_r^n + \frac{\nu\cos\varphi}{r^2}\lambda_n^2u_z^n - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\lambda_nv^n - \frac{\cos\varphi}{r}\vartheta_s^n.
\end{aligned}$$

Граничные условия можно представить в следующем виде:

$$B_1\bar{Z}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Z}(L) = \bar{b}_2, \tag{13}$$

где  $\bar{Z}(s) = \{N_{r,n}, N_{z,n}, \mathcal{E}_n, M_{s,n}, u_{r,n}, u_{z,n}, v_n, \mathcal{G}_{s,n}\}^T$  – вектор-столбец разрешающих функций;  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы,  $\bar{b}_1$  и  $\bar{b}_2$  – векторы.

2. Полученную краевую задачу (12), (13) будем решать численным методом дискретной ортогонализации на интервале  $0 \leq s \leq L$ . С учётом (9) для каждого  $n$  в уравнениях (12) имеем

$$\begin{aligned} \psi_{1,n}^j &= \psi_{1,n}^j(s; u_r; u_z; v; \mathcal{G}_s) \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad \psi_{2,n}^j = \psi_{2,n}^j(s; u_r; v) \quad (j = 1, 2); \\ \psi_{3,n}^j &= \psi_{3,n}^j(s; u_z; \mathcal{G}_s) \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\psi_{4,n}^j = \psi_{4,n}^j(s; \mathcal{E}; u_z; \mathcal{G}_s) \quad (j = 1, 2, 3); \quad \psi_{5,n}^j = \psi_{5,n}^j(s; N_r; N_z) \quad (j = 1, 2);$$

$$\psi_{6,n} = \psi_{6,n}(s; \mathcal{E}); \quad \psi_{7,n} = \psi_{7,n}(s; M_s).$$

Входящие в коэффициенты рядов Фурье (11)  $\psi_{i,n}^j$  не выражаются явно через коэффициенты рядов Фурье разрешающих функций, а вычисляются при интегрировании системы (12) с использованием дискретных рядов Фурье на каждом шаге  $s = \text{const}$ . Соотношения (14) показывают зависимость этих коэффициентов от амплитудных значений определённых разрешающих функций и связность всех уравнений системы (12).

Уравнения системы (12) интегрируются одновременно для всех гармоник с помощью указанного метода дискретной ортогонализации. Для определения в процессе интегрирования амплитудных значений функций (14) по текущим значениям разрешающих функций для фиксированного значения  $s = s_k$  ( $k = \overline{0, K}$ ) вычисляем в ряде точек  $\theta_r$  ( $r = \overline{0, R}$ ) интервала  $0 \leq \theta \leq \pi$  значения функций (14) и строим ряд Фурье для дискретно заданной функции, который будем называть дискретным рядом Фурье. С увеличением числа точек  $\theta_r$ , в которых вычисляются значения дополнительных функций, дискретный ряд Фурье всё меньше отличается от точного ряда Фурье.

В начале интегрирования учитываются граничные условия на этом крае. Найденные амплитудные значения функций (14) подставляются в систему (12) и продолжается интегрирование по  $s$ . При этом применяется метод Рунге – Кутты с ортогонализацией в отдельных точках интервала  $0 \leq s \leq L$ . Таким образом, используя текущие значения амплитуд разрешающих функций, при фиксированном значении координаты  $s = s_k$  ( $0 \leq s \leq L$ ) вычисляем в точках  $\theta_r$  ( $1 \leq r \leq R$ ) следующие величины:

$$D_M^r, D_N^r, \frac{D_M^r}{p_0^r}, \frac{D_M^r}{p_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_N^r}, \frac{1}{p_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_M^r}.$$

Используя числовые значения этих величин и выражения дополнительных функций (9), по вычисленным значениям амплитуд разрешающих функций получаем

$$\psi_1^1(s_k, \theta_r) = -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N u_r^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r;$$

$$\psi_1^2(s_k, \theta_r) = -D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N u_z^n(s_k) \lambda_n^2 \cos \lambda_n \theta_r;$$

$$\psi_1^3(s_k, \theta_r) = D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N v^n(s_k) \lambda_n \cos \lambda_n \theta_r; \quad (15)$$

$$\psi_1^4(s_k, \theta_r) = D_M(s_k, \theta_r) \sum_{n=1}^N g_s^n(s_k) \cos \lambda_n \theta_r.$$

Аналогично вычисляются значения дополнительных функций  $\psi_2^j, \psi_3^j, \psi_4^j, \psi_5^j, \psi_6, \psi_7$  в точках  $\theta_r$  ( $1 \leq r \leq R$ ).

На основе полученных значений дополнительных функций строим дискретные ряды Фурье, представленные в виде, аналогичном (11), коэффициенты которых являются недостающими амплитудными значениями дополнительных функций (14) при  $s = s_k$  для системы (12). Используя при этом стандартную процедуру определения коэффициентов Фурье для таблично заданной функции, находим их числовые значения [12]. Полученные значения коэффициентов Фурье (14) дополнительных функций подставляем в систему (12) и продолжаем интегрирование по  $s$ , переходя от точки  $s_k$  к точке  $s_{k+1}$ .

Для решения краевой задачи (12), (13) применяем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации. В начале и конце интегрирования удовлетворяем граничным условиям.

Отметим, что с увеличением числа точек  $R$ , в которых вычисляются дополнительные функции, дискретный ряд Фурье все меньше отличается от ряда Фурье непрерывно заданной функции. На практике приходится пользоваться лишь немногими первыми членами тригонометрического разложения, так как коэффициенты Фурье в большинстве случаев быстро убывают, а с ними быстро падает и влияние далёких гармоник. Известно, что в вопросе о точности приближений при вычислении рядов Фурье важную роль играет скорость убывания коэффициентов Фурье, которая, в свою очередь, связана с дифференциальными свойствами функции, продолженной на весь интервал  $(-\infty, \infty)$ . Наряду с этим имеются приближённые подходы, которые позволяют сравнить значение коэффициента дискретного ряда Фурье, построенного на конечном множестве точек, с точными значениями этого же и других коэффициентов ряда Фурье для той же функции, заданной аналитически. Так, в книге [12] показано, что, в частности, если число членов дискретного ряда Фурье  $R = 12$ , то следует учитывать лишь 2 – 3 члена ряда. Если же  $R = 24$ , то можно ожидать приемлемую точность при 7 – 8 членах ряда.

3. На основании данного подхода проведём исследование напряжённо-деформированного состояния конических оболочек переменной в окружном направлении толщины в зависимости от угла раствора конуса и параметров толщины.

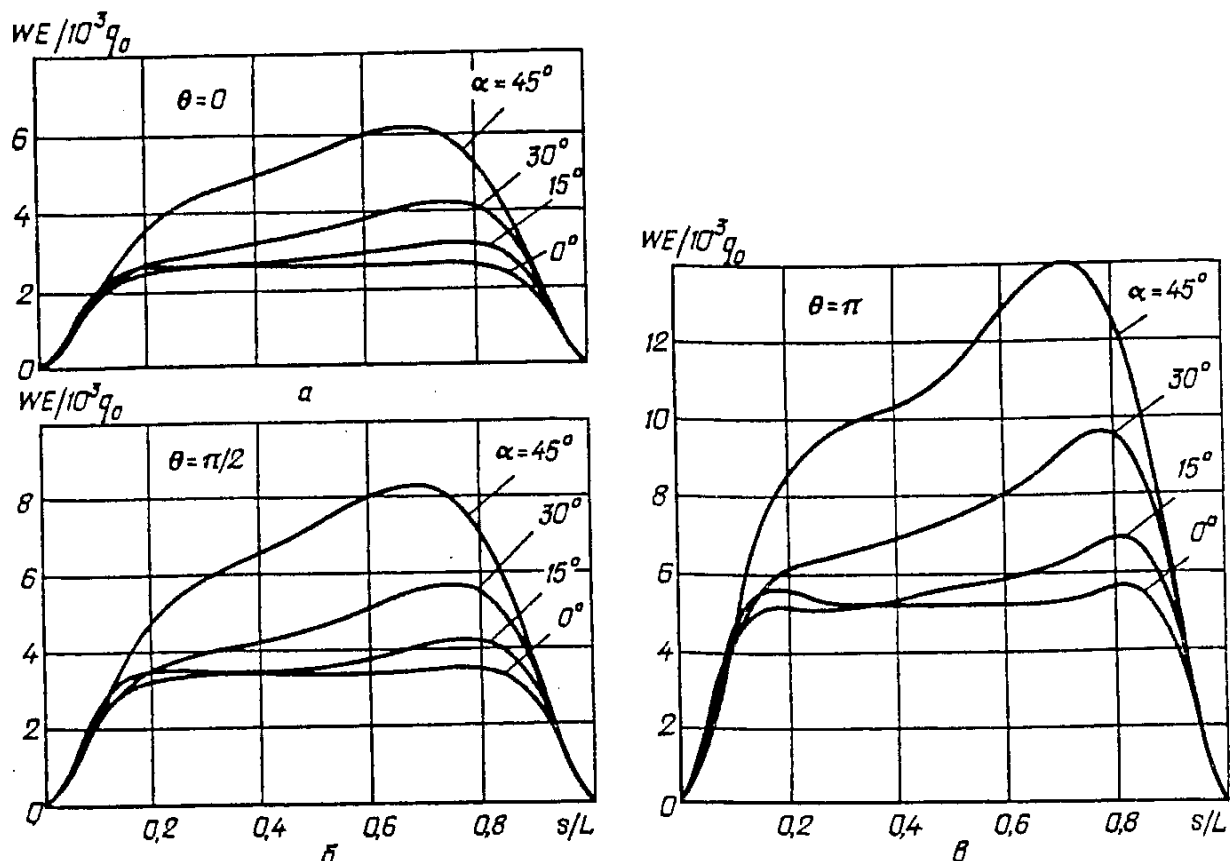


Рис. 1

Рассмотрим задачу для конической оболочки с углом раствора  $2\alpha$  ( $\alpha = \pi/2 - \varphi$ ) и толщиной, изменяющейся по закону  $h(\theta) = H(1 + \beta \cos \theta)$ , при равномерной нормальной нагрузке  $q = q_0 = \text{const}$  и жёстком закреплении торцов.

Принято, что с изменением угла раствора конуса образующая поворачивается вокруг среднего радиуса  $R_{cp}$  (радиус при  $s=L/2$ ), не изменяя при этом своей длины. Следует отметить, что при данном законе изменения толщины сохраняется вес оболочки при любом значении  $\beta$ .

Задача решалась при следующих данных:  $L=30$ ;  $R_{cp}=30$ ;  $H=0,25$ ;  $\beta = 0,0; 0,2; 0,3; 0,4$ ;  $\alpha=0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ$ . При решении принято число членов дискретного ряда Фурье  $R=100$ , число учитываемых членов ряда  $N=12$ .

На рис. 1, а, б, в дано распределение прогиба  $w$  вдоль образующей для различных углов раствора конуса  $2\alpha$  при  $\beta=0,4$  и  $\theta = 0; \pi/2; \pi$ . Из приведенных графиков видно, как с изменением угла  $\alpha$  при фиксированном значении  $\theta$  изменяется величина прогиба. При этом в области, примыкающей к краю с большим радиусом, величина прогиба возрастает. С изменением толщины в окружном направлении от  $\theta=0$  до  $\theta=\pi$  максимальная величина прогиба увеличивается в отношении: для  $\alpha=15^\circ - 1; 1,3; 2,3$ ; для  $\alpha=30^\circ - 1; 1,4; 2,4$ ; для  $\alpha=45^\circ - 1; 1,3; 2,3$ , т.е. для всех углов раствора имеем одинаковые отношения максимальных прогибов. При всех значениях угла  $\theta$  величина максимального прогиба относительно прогиба цилиндрической оболочки находится в отношении  $1; 1,2; 1,6; 2,4$ . Изменение величины прогиба в окружном направлении объясняется тем, что толщина оболочки от  $\theta=0$  до  $\theta=\pi$  изменяется как  $1,4 : 0,6$ , т.е. в 2,3 раза.

На рис. 2 показаны графики при  $\alpha = 30^\circ$  распределения прогиба  $w$  вдоль образующей при различных значениях параметра  $\beta$ . Сплошными кривыми обозначены прогибы для  $\theta = 0$ , штриховыми – для  $\theta = \pi$ , а штрих-пунктирной – для оболочки постоянной толщины. Из приведенных графиков видно, как влияет изменение величины  $\beta$ , характеризующей характер уменьшения толщины по окружности, на распределение прогибов.

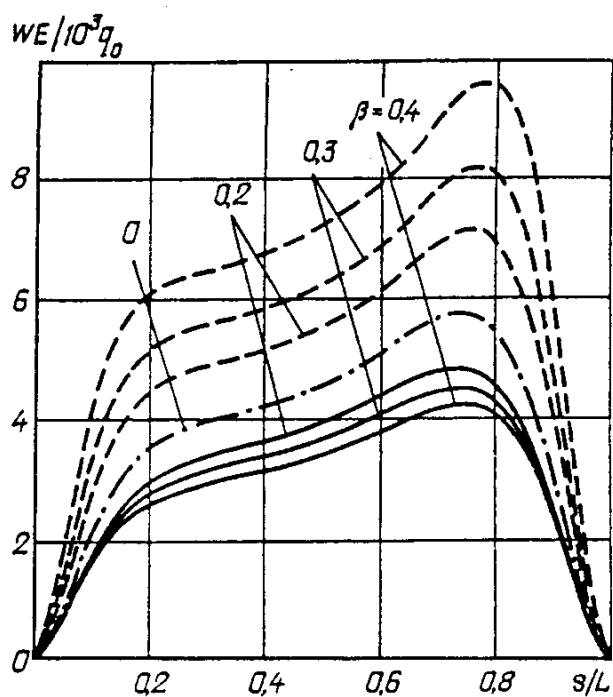


Рис. 2

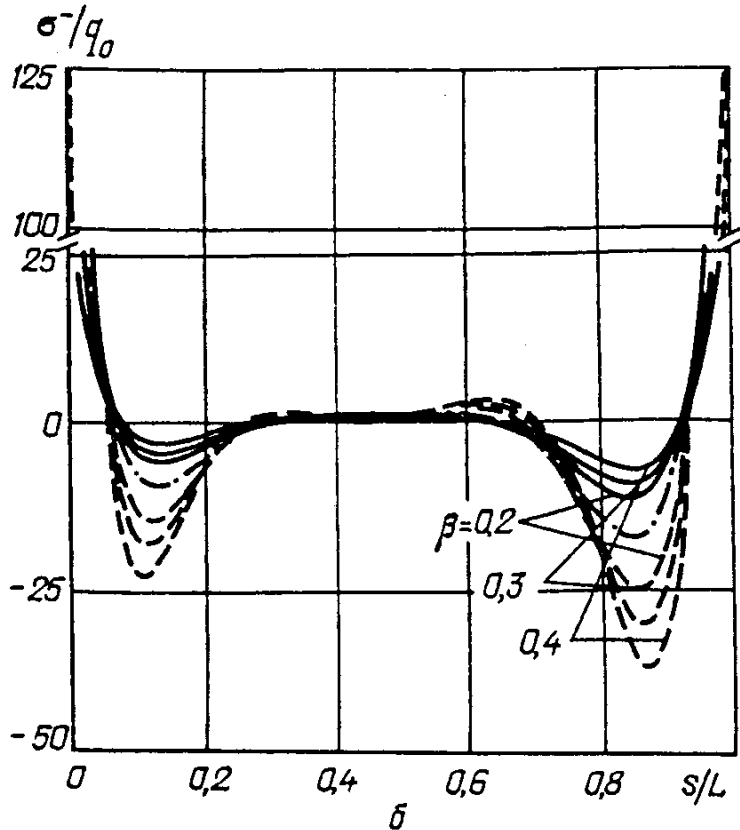
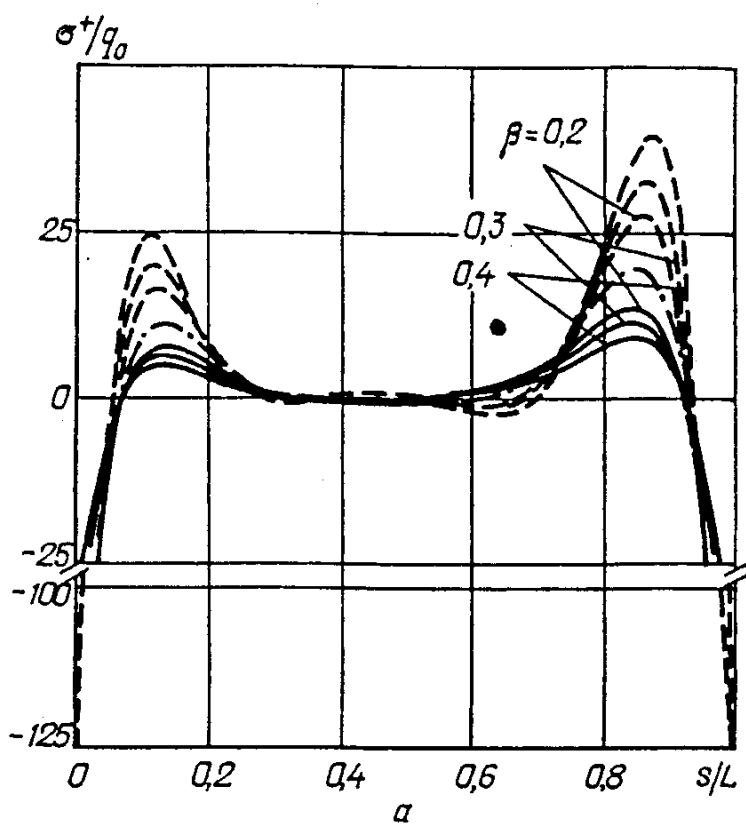


Рис. 3



На рис. 3 *a, б* при тех же значениях параметров показаны графики распределения напряжений  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  соответственно на наружной и внутренней поверхностях оболочки при различных значениях  $\beta$ , указанных на рисунках. При  $\theta = 0$  напряжения показаны сплошными линиями, а при  $\theta = \pi$  – штриховыми.

Из рисунков видно, что на краях оболочки, которые жёстко закреплены, напряжения резко возрастают. На некотором расстоянии от краёв они также возрастают, а в средней части оболочки приближаются к нулю.

Таблица 1

$s/L$	$\theta/\pi$	$W E/q_0$					
		$\beta = 0,2$			$\beta = 0,4$		
		$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
0,2	0	1592,64	1519,83	2068,74	734,438	1163,06	1490,53
0,4		1901,81	2268,55	3273,06	2055,02	1878,32	2460,19
0,6		2294,16	3147,73	4802,38	1973,17	2719,79	3849,91
0,8		2758,00	4310,64	6646,08	1945,29	3704,74	5652,86
0,2	0,2	1607,82	1599,38	2206,20	1950,43	1371,07	1746,27
0,4		1983,54	2356,16	3460,73	1445,00	2038,35	2897,34
0,6		2358,81	3248,28	5016,08	2140,13	2835,93	4376,65
0,8		2814,88	4448,61	6898,00	2907,69	3888,57	6107,71
0,2	0,4	1766,35	1790,43	2571,65	1572,55	1820,45	2590,55
0,4		2141,64	2603,53	3925,24	2148,01	2483,20	3987,06
0,6		2563,07	3555,68	5555,18	2436,86	3363,93	5503,70
0,8		3065,85	4860,06	7608,14	2726,89	4590,65	7340,40
0,2	0,6	1970,46	2012,09	2962,23	1759,50	2180,12	3735,03
0,4		2395,00	2955,15	4445,21	2820,47	3238,26	5091,93
0,6		2868,65	4018,37	6221,26	3006,92	4373,17	6847,26
0,8		3414,97	5471,54	8636,85	3503,92	5866,85	9360,16
0,2	0,8	2146,27	2223,25	3126,78	3363,47	2670,82	3792,96
0,4		2668,77	3279,17	4822,18	2663,07	4044,36	5880,97
0,6		3170,42	4458,20	6799,39	4021,46	5483,52	8218,89
0,8		3742,39	6059,46	9652,32	5006,72	7323,37	11886,6
0,2	1,0	2277,42	2325,53	3131,57	2042,26	3089,31	3422,39
0,4		2751,65	3411,20	4952,25	4289,30	4376,78	6066,20
0,6		3311,84	4641,84	7038,88	4087,69	5983,20	8935,65
0,8		3920,10	6309,69	10099,5	4375,39	8036,17	13258,3

В табл. 1, 2, 3 приведены значения прогиба  $w$  и напряжений  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  для оболочек с параметрами:  $L=50$ ;  $R_{cp}=25$ ;  $H=0,25$ ;  $\beta=0,2$ ;  $0,4$ ;  $\alpha=15^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $45^\circ$  по образующей и направляющей.

Приведенные в таблицах значения показывают характер изменения этих величин в зависимости от изменения указанных параметров.

s/L	$\theta/\pi$	$\sigma^+$					
		$\beta = 0,2$			$\beta = 0,4$		
		$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
0	0	-33,34	-29,88	-34,44	0,20	-16,51	-16,12
0,2		-0,03	-0,50	-0,84	-7,21	-1,21	-1,68
0,4		-0,24	-0,28	-0,88	4,35	-0,37	-1,64
0,6		-0,11	-0,32	-1,12	-0,57	-0,17	-1,37
0,8		-0,05	1,47	8,81	-3,18	0,96	4,81
1,0		-46,34	-57,32	-70,26	-27,54	-38,69	-45,93
0	0,2	-33,94	-32,41	-37,98	-42,67	-21,97	-22,65
0,2		-0,35	-0,39	-0,69	4,80	-0,51	-1,93
0,4		-0,02	-0,28	-0,74	-3,51	-0,34	-1,18
0,6		-0,13	-0,34	-1,11	0,03	-0,53	-0,69
0,8		-0,26	1,46	9,31	2,61	1,08	6,01
1,0		-48,74	-60,74	-74,78	-39,33	-43,66	-53,67
0	0,4	-40,00	-38,79	-47,88	-31,85	-37,09	-41,63
0,2		-0,21	-0,30	-0,17	-0,98	0,31	-0,54
0,4		-0,12	-0,26	-0,51	0,27	-0,54	-0,22
0,6		-0,09	-0,31	-1,24	-0,09	-0,65	-0,87
0,8		-0,38	1,34	10,53	-1,01	1,39	8,61
1,0		-56,64	-70,85	-87,68	-46,61	-60,44	-75,95
0	0,6	-48,31	-46,53	-59,73	-33,66	-48,65	-79,25
0,2		-0,22	-0,43	0,08	-2,72	-0,59	2,41
0,4		-0,08	-0,16	-0,38	1,97	-0,20	-0,54
0,6		-0,01	-0,14	-1,44	-0,74	-0,25	-1,48
0,8		-0,73	0,86	11,75	-1,38	0,72	10,87
1,0		-68,54	-86,20	-106,64	-71,31	-91,28	-113,51
0	0,8	-55,69	-54,52	-65,84	-105,45	-67,05	-81,34
0,2		-0,34	-0,44	-0,71	3,10	-0,56	-0,88
0,4		0,13	-0,07	-0,27	-3,18	0,08	-0,05
0,6		0,04	0,05	-1,47	1,02	0,19	-1,18
0,8		-1,13	0,10	12,39	0,08	-1,45	10,66
1,0		-80,64	-101,75	-125,63	-106,77	-131,61	-162,37
0	1,0	-61,16	-58,76	-66,91	-45,57	-87,33	-81,15
0,2		-0,06	-0,36	-1,31	-2,94	0,19	-3,35
0,4		-0,02	-0,06	-0,25	3,70	-0,02	-0,39
0,6		0,12	0,13	-1,40	-0,72	0,31	-0,35
0,8		-1,16	-0,29	12,51	-2,73	-2,71	9,65
1,0		-86,32	-108,67	-134,06	-118,66	-153,90	-189,59

Таблица 3

s/L	$\theta/\pi$	$\sigma^-$					
		$\beta = 0,2$			$\beta = 0,4$		
		$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
0	0	30,17	27,03	31,16	-0,17	14,69	14,34
0,2		0,03	0,45	0,76	6,41	1,08	1,49
0,4		0,22	0,26	0,80	-3,87	0,33	1,46
0,6		0,10	0,29	1,01	0,50	0,15	1,22
0,8		0,05	-1,33	-7,97	2,83	-0,86	-4,28
1,0		41,92	51,86	63,57	24,50	34,42	40,87
0	0,2	30,80	29,42	34,47	38,21	19,67	20,28
0,2		0,32	0,35	0,62	-4,30	0,45	1,73
0,4		0,01	0,26	0,67	3,15	0,30	1,05
0,6		0,12	0,31	1,01	-0,02	0,47	0,62
0,8		0,23	-1,33	-8,45	-2,34	-0,97	-5,38
1,0		44,24	55,13	67,87	35,22	39,09	48,06
0,0	0,4	36,61	35,51	43,82	29,00	33,78	37,91
0,2		0,19	0,28	0,15	0,89	-0,28	0,49
0,4		0,11	0,24	0,47	-0,25	0,49	0,20
0,6		0,08	0,28	1,13	0,08	0,59	0,79
0,8		0,34	-1,22	-9,64	0,92	-1,27	-7,84
1,0		51,84	64,85	80,25	42,44	55,04	69,16
0	0,6	44,67	43,03	55,24	31,29	45,22	73,67
0,2		0,20	0,40	-0,07	2,53	0,55	-2,24
0,4		0,07	0,15	0,35	-1,83	0,18	0,50
0,6		0,01	0,13	1,33	0,69	0,23	1,37
0,8		0,67	-0,79	-10,87	1,28	-0,67	-10,10
1,0		63,38	79,71	98,62	66,28	84,85	105,51
0	0,8	51,93	50,84	61,39	99,67	63,38	76,88
0,2		0,32	0,41	0,66	-2,93	0,53	0,84
0,4		-0,12	0,07	0,25	3,00	-0,08	0,04
0,6		-0,03	-0,04	1,37	-0,97	-0,18	1,12
0,8		1,05	-0,09	-11,55	-0,08	1,37	-10,07
1,0		75,20	94,88	117,15	100,91	124,39	153,47
0	1,0	57,21	54,97	62,60	43,35	83,07	77,19
0,2		0,06	0,34	1,22	2,80	-0,18	3,18
0,4		0,01	0,05	0,23	-3,52	0,01	0,37
0,6		-0,12	-0,12	1,31	0,68	-0,29	0,33
0,8		1,08	0,27	-11,71	2,60	2,58	-9,18
1,0		80,75	101,66	125,41	112,87	146,39	180,34

**Р Е З Ю М Е .** Розроблено підхід до розв'язання класу двовимірних крайових задач про напружено-деформований стан конічних оболонок змінної в коловому напрямі товщини. Підхід базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є для відокремлення змінних і зведення двовимірної задачі до одновимірної. Одновимірною крайовою задачею розв'язується за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. Наведено результати розв'язання задач у вигляді графіків і таблиць.

**S U M M A R Y .** An approach to solving the class of two-dimensional boundary problems on stress-strain state of conical shells with variable in circumferential direction is developed. The approach is based on application of Fourier discrete series for separating of variables and reducing the two-dimensional problem to the one-dimensional one. The one-dimensional boundary problem is solved using the stable numerical method of discrete orthogonalization. Results obtained are shown in the form of plots and tables.

**Key words:** conical shells, variable thickness, Fourier discrete series, method of discrete orthogonalization.

1. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и её приложение в технике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 748 с.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
3. *Григоренко Я.М.* Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости. – К.: Наук.думка, 1973. – 228 с.
4. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жёсткости. – К.: Наук.думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчёта оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
5. *Григоренко Я.М., Тимонин А.М.* Об одном подходе к численному решению двумерных задач теории пластин и оболочек с переменными параметрами // Прикл. механика. – 1987. – 23, №6. – С. 54 – 61.
6. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
7. *Коваленко А.Д.* Пластины и оболочки в роторах турбомашин. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 304 с.
8. *Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А.* Теория тонких конических оболочек и её приложение в машиностроении. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 287 с.
9. *Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Лобкова Н.А.* Расчёт конических оболочек линейно-переменной толщины. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 328с.
10. *Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А., Полищук Т.И.* Расчёт конических оболочек при антисимметричных нагрузках. – К.: Наук. думка, 1966. – 496 с.
11. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Физматгиз, 1966 – Т.3. – 656с.
13. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // J. of Engineering Mathematics – 2003. – 46. – P. 269 – 280.
14. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Analysis of Orthotropic Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 6. – P. 679 – 685.
15. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N3. – P. 277 – 282.
16. *Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N.* On Influence of Thickness Change on Displacements and Stresses in Orthotropic Non-Thin Cylindrical Shells with Elliptical Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N8. – P. 901 – 910.
17. *Grigorenko Ya.M., Zakhariyenko L.I.* Studying the Effect of the Spatial Frequency and Amplitude of Corrugation on the Stress-Strain State of Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N12. – P.1429 – 1433.
18. *Kovalenko A.D., Grigorenko Ja.M., Illin L.A., Polischuck T.I.* The design of conical shells subjected to anti-symmetric loadings. – National Aeronautics and Space Administration Technical Translation, 1969. – 497 p.
19. *Piskunov V.G., Rasskasov A.O.* Development of the Theory of Layered Plates and Shells // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N2. – P. 135 – 166.

Ин-т механики им. С. П.Тимошенко  
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 12.04.2005